Devoir Maison de théorie des champs n°8

Lagrange et Noether en relativité

Dans le cours nous avons vu, progressivement et intuitivement, que l'on pouvait déduire les équations de Maxwell de l'électromagnétisme (entre autres) d'un principe de moindre action. Il est temps de prendre un peu de recul sur les notations pour bien comprendre ce que l'on a fait et comment il faut le faire dans le cas général.

Après avoir découvert le formalisme de la physique, nous entrons maintenant dans un vif du sujet : nous proposons dans ce devoir d'écrire des équations de la physique dans un formalisme adapté et efficace, nous vous demandons d'attacher vos ceinture et d'éteindre vos téléphones portables. Nous allons bientôt décoller !

1 Les équations de Lagrange en relativité restreinte

1.1 Equation de la dynamique d'une particule relativiste

Considérons une particule repérée par sa position $\boldsymbol{x} \in M_{4,\mathbb{R}}$ qui évolue dans l'espacetemps selon un certain paramétrage λ qui peut-être par exemple son temps propre, mais pas que... Sa ligne d'univers $\mathscr{L}$ est l'ensemble des positions successives de $\boldsymbol{x}$ au gré de l'évolution sur toutes les valeurs possibles de λ. En choisissant par exemple de représenter $\boldsymbol{x}$ par sa composante contravariante nous aurons

$$\mathscr{L}: \; x^\mu = x^\mu(\lambda) \;\text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \; \mu \in (0,1,2,3)$$

En généralisant la notation $\cdot$ de la mécanique classique nous pouvons écrire

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

et l'on appellera action $\mathcal{S}$ et lagrangien $\mathcal{L}$ de cette particule une quantité[1]

$$\mathcal{S} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L}\left(x^\mu(\lambda), \dot{x}^\mu(\lambda)\right) d\lambda$$

qui sera minimale le long de $\mathscr{L}$, le lagrangien $\mathcal{L}\left(x^\mu(\lambda), \dot{x}^\mu(\lambda)\right)$ étant un scalaire pour que ces équations soient les mêmes dans tous les référentiels, c'est-à-dire indépendante du paramétrage λ. Cette dernière contrainte impose que (nous l'admettrons !) L soit une fonction homogène de degré 1 pour sa variable $\dot{x}^\mu$: $\forall k$, $\mathcal{L}\left(x^\mu, k\dot{x}^\mu\right) = k\mathcal{L}\left(x^\mu, \dot{x}^\mu\right)$, ce qui implique (vous le savez bien maintenant) que $\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{L} = 1 \times \mathcal{L}$ mais attention le gradient qui apparaît ici est dans $M_{4,\mathbb{R}}$ et dérive par rapport à la variable pointée, cette propriété s'écrit donc en composantes sous la forme

$$\dot{x}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \mathcal{L} \tag{1}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \;\text{ pour } \; \mu \in (0,1,2,3)$$

[1] Si L dépend en plus de λ on pourra généraliser le cas traité en introduisant, comme en mécanique classique, un lagragien étendu.

Il y en a donc 4 équations de Lagrange au lieu de 3, ça on pouvait s'y attendre, mais la contrainte $\dot{x}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \mathcal{L}$ est indépendante des équations de Lagrange. Ce sont donc bien 3 équations qui décrivent le mouvement : *la relativité n'ajoute pas de degré de liberté !*

Pour obtenir ces équations il suffit de faire la variation $x^\mu(\lambda) \to x^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda)$ telle que $\delta x^\mu(\lambda_1) = \delta x^\mu(\lambda_2) = 0$ et d'écrire que la variation correspondante $\delta\mathcal{S} = 0$. Cette condition assure l'extremum, pour le minimum il faut encore montrer que la variation de $\mathcal{S}$ à l'ordre 2 est positive...

Si cette particule de masse m évolue dans un potentiel décrit par le 4–vecteur $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ et qu'elle y est sensible par l'intermédiaire de son scalaire de couplage χ alors son mouvement dans ce potentiel est décrit par l'action

$$\mathcal{S} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L \, d\lambda \text{ avec } L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = -mc\sqrt{\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}} - \chi \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

Pour ceux qui auraient oublié on rappelle que le produit scalaire s'écrit soit avec la métrique en utilisant deux composantes de même valence (par exemple $\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$), soit directement en utilisant des valences complémentaire : par exemple (par exemple $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = P_\mu \dot{x}^\mu$). Pour que tout soit bien clair en ces périodes de confinement, on précise que les composantes de $\boldsymbol{P}$ dans un référentiel de $M_{4,\mathbb{R}}$ (i.e P^μ) ou de $M^*_{4,\mathbb{R}}$ (i.e P_μ) sont 4 fonctions de $M^*_{4,\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$: chaque composante de $\boldsymbol{P}$ est un champ scalaire.

❑ − **1**. Le lagrangien (2) est-il indépendant du paramétrage λ ?
En écrivant les équations de Lagrange, expliciter le principe fondamental de la dynamique relativiste qui est une relation entre la masse m, le scalaire de couplage χ et les composantes de la 4–accélération $\boldsymbol{\Gamma}$, celles de la 4–vitesse $\boldsymbol{u}$, et celles d'un tenseur d'ordre 2 noté $\boldsymbol{W}$ dont on exprimera la composante complètement covariante $W_{\mu\nu}$ en fonction des composantes covariantes de $\boldsymbol{P}$.

NB. On rappelle que les variables de Lagrange $\boldsymbol{x}$ et $\dot{\boldsymbol{x}}$ sont indépendantes...

1.2 Les équations du champ

Les équations de Lagrange que nous venons de reformuler utilisent des variables vectorielles que sont les positions et les vitesses généralisées $\boldsymbol{x}$ et $\dot{\boldsymbol{x}}$: le lagrangien dépend donc de ces variables $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$.

Nous savons bien par l'expérience que certains mouvements sont à l'origine de certains champs : en fait, en théorie des champs ces derniers sont indissociablement rattachés au mouvement à travers un principe variationnel... La physique est bien faite!

Pour obtenir de telles équations il faut considérer non plus des variations de la position $\boldsymbol{x}$ dans un champ modélisé par un tenseur d'ordre n que l'on appellera $\boldsymbol{C}$, mais le contraire. Ce champ est induit par un courant de particules qui est modélisé par un 4–vecteur, le 4–courant, que l'on note traditionnellement $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$. La composante contravariante du 4–courant est $J^\mu = [\rho c, \rho\vec{v}]^\top$ où $\rho(\vec{x}, t)$ est la densité volumique spatiales des particules et $\vec{v}$ la 3–vitesse de ces particules.

Le lagrangien du champ $\boldsymbol{C}$ est alors une fonction de $\boldsymbol{C}$ lui-même est de ces variations $\partial_\mu \boldsymbol{C}$ ainsi on notera $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\boldsymbol{C}, \partial_\mu \boldsymbol{C})$, on peut aussi être plus explicite et faire apparaître les composantes de $\boldsymbol{C}$ et $\partial_\mu \boldsymbol{C}$ qui sont des tenseurs d'ordre différent...

L'action se calcule par une intégration de ce lagrangien sur toute la partie ϑ de l'espacetemps contenant le courant $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$, pour que tout cela ne diverge pas on considère physiquement que le flux de $\boldsymbol{J}$ à travers la surface Σ de ϑ est nul. On a donc

$$S = \int_\vartheta \mathcal{L}(\boldsymbol{C}, \partial_\mu \boldsymbol{C})$$

On appelle parfois ce genre de lagrangien une densité de lagrangien car ses variables sont des champs, mais restons calme !

Les équations de Lagrange sont celles qui correspondent à un extremum de cette action, on montre assez facilement qu'elles s'écrivent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{C}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \boldsymbol{C} \right)} \right) = 0$$

On appelle ces équations les équations du champ : les degrés de liberté x^μ de la particule sont remplacés par les composantes du champ $\boldsymbol{C}$ et le paramètre λ par les 4 coordonnées x^μ sur l'espacetemps restreint à ϑ.

Le cas le plus simple est celui d'un champ scalaire : $\boldsymbol{C} = \phi(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ et d'une théorie de type Klein-Gordon dont le lagragien est de la forme

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2\ell^2} \phi^2$$

où ℓ est une longueur. En théorie quantique des champs $\ell = \dfrac{\hbar}{mc}$ si m est la masse de la particule considérée.

❏ − **2**. Déterminer l'équation physique vérifiée par le champ de Klein-Gordon.

On considère un peu moins simple dans lequel le champ $\boldsymbol{C}$ est un 4–vecteur $(n = 1)$ et son lagrangien, dit de Proca, donné par

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{C}, \partial_\mu \boldsymbol{C}) = J^\mu C_\mu - \frac{1}{2} \xi \eta^{\mu\nu} C_\mu C_\nu - \frac{1}{4} \Lambda \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \left(\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu \right) \left(\partial_\rho C_\sigma - \partial_\sigma C_\rho \right)$$

Les paramètres réels ξ et Λ sont fixés par les caractéristiques physiques du champ considéré.

❏ − **3**. Déterminer les équations physiques vérifiées par le champ $\boldsymbol{C}$.

<u>Aide</u> : Pour ceux qui n'auraient pas compris les notations : les équations du champ pour la composante covariante de $\boldsymbol{C}$ s'écrivent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^v} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\nu C_\mu \right)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_\mu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{\mu,\nu}} \right)_{,\nu} = 0$$

2 Le théorème de Noether en théorie des champs

2.1 Le théorème pour un champ scalaire

On note $\boldsymbol{x}$ un évènement de l'espacetemps. On considère une théorie dont la densité de lagrangien $\mathcal{L}$ dépend uniquement d'un champ scalaire $\phi(\boldsymbol{x})$ et de ses dérivées $\partial_\mu \phi$, soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. On suppose que ce lagrangien est invariant sous l'action d'un groupe de transformation $\mathbb{G}$. C'est à dire qu'il existe une fonction g_σ telle que

$$\mathbb{G} = \{g_\sigma,\ \sigma \in \mathbb{R}\} \begin{cases} g_0 = \mathrm{Id} \\ \forall (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad g_{\sigma_1} \circ g_{\sigma_2} = g_{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \forall \sigma \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(g_\sigma(\phi), \partial_\mu [g_\sigma(\phi)]) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \end{cases} \tag{3}$$

Il n'y a pas de problème de notation car g est une fonction et pas un tenseur, cette fonction dépend du paramètre réel σ qui n'est donc pas un indice. Pour rester en paix avec vous même, il faudra tenter de ne pas utiliser cette lettre dans vos calculs...

On définit le *courant de Noether* associée au groupe de symétrie $\mathbb{G}$ par le 4–vecteur dont la composante contravariante est donnée par la relation

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left. \frac{d g_\sigma(\phi)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}$$

❏ – **4**. On suppose que l'action de ∂_μ sur $g_\sigma(\phi)$ commute avec celle de sa dérivée par rapport à σ. Montrer que la symétrie de $\mathcal{L}$ sous l'action de $\mathbb{G}$ implique la conservation du courant de Noether le long de la ligne d'Univers de $\boldsymbol{x}$.

Ce résultat constitue un cas particulier du théorème de Noether pour le cas des champs scalaires. On en acceptera sans peine, ou pas, une généralisation à un champ tensoriel d'ordre quelconque ?

2.2 Symétrie de jauge en électromagnétisme

En théorie quantique des champs, le vide peut être assimilé à une région de l'espacetemps ϑ dans laquelle règne un champ électromagnétique décrit par le 4–potentiel $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, étudié en cours, mais ne contenant aucune particule. Ainsi le 4–courant est identiquement nul dans le vide : $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$. Après avoir étudié le cours on comprend que lagrangien associé du vide s'écrit

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{avec } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_v - \partial_\nu A_\mu$$

On considère le groupe de symétrie engendré par la fonction

$$g_\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{4,\mathbb{R}} & \to & \mathbb{M}_{4,\mathbb{R}} \\ \boldsymbol{y} & \mapsto & \boldsymbol{y} + \sigma \boldsymbol{\nabla} \psi \end{array}$$

où ψ est un champ scalaire appelé jauge électromagnétique, ses seules propriétés sont d'être dérivable et de s'annuler sur le bord de ϑ. On parle de symétrie de jauge...

❏ – **5**. Vérifier que le lagrangien du vide est invariant sous la symétrie de jauge[2].

En généralisant la notion de courant de Noether on définit maintenant le courant de jauge électromagnétique par la relation

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_v)} \left. \frac{d g_\sigma(A_v)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}$$

❏ – **6**. Après avoir simplifié l'expression du courant de jauge électromagnétique, montrer que pour toute jauge électromagnétique

$$\int_\vartheta j^\mu = 0$$

Salut et Fraternité !

[2]Posez cette question à un(e) camarade, ou à un(e) cousin(e) et attendez une réponse satisfaisante...