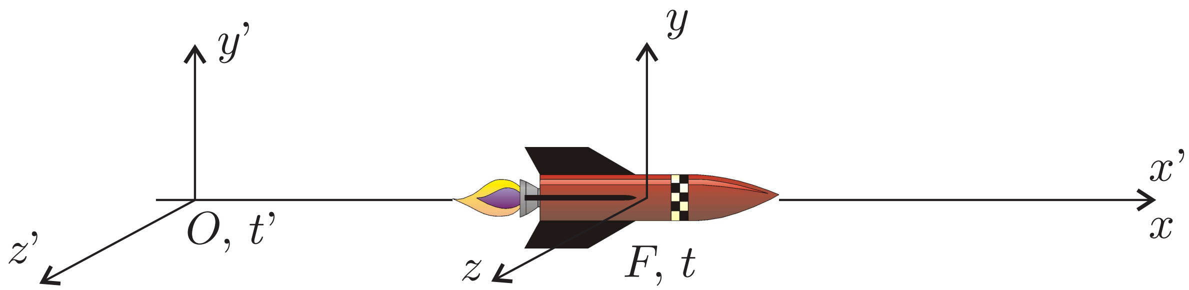
Devoir Maison de théorie des champs n°7

Les voyages forment la jeunesse

On dit souvent que l'on ne pourra jamais faire de long voyages vers les étoiles... Est-ce que c'est vrai ?

Nous allons déterminer dans cet exercice les caractéristiques du voyage d'une fusée constamment accélérée à l'accélération de la pesanteur terrestre $a = g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ dans une direction fixe : sa destination.

Le fait de conserver cette accélération permet aux voyageurs de supporter confortablement le voyage... Les moyens techniques pour bénéficier de cette accélération pendant de longues durées posent des problèmes de nature physique et technique différents relevant plutôt du domaine de l'ingenierie. De futurs ingénieurs pourront donc les évoquer dans la réponse à la dernière question!



On considère une fusée F repérée par sa 4–position $\boldsymbol{x} \in M_{4,\mathbb{R}}$, possédant une 4–vitesse $\boldsymbol{u} \in M_{4,\mathbb{R}}$, une 4–accélération $\boldsymbol{a} \in M_{4,\mathbb{R}}$ et un temps propre t. On dit que cette fusée est uniformément accéléré si :

H1 L'ensemble de tous les évènements successifs $\{F(t)\}_{t\in R}$ est contenu dans un plan $\Pi \subset M_{4,\mathbb{R}}$. Ce lieu est appelé ligne d'univers de la fusée;

H2 La norme de sa 4–accélération est constante : $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_\mu a^\mu = -a^2 = cste$.

On repère cette fusée dans un référentiel orthonormé $\mathcal{R} = \{F, (\boldsymbol{e}_\mu)\}$ (dans lequel elle est immobile) par les composantes contravariantes de sa 4–position $\boldsymbol{x} = x^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ que l'on notera $x^\mu = [ct, x, y, z]^\top$.

On considère également un référentiel orthonormé fixe $\mathcal{R}' = \left\{O, \left(\boldsymbol{e}'_\mu\right)\right\}$ dans lequel la fusée est repérée par $x'^\mu = [ct', x', y', z']^\top$, et tel que $\Pi = \mathrm{vect}\,(\boldsymbol{e}'_0, \boldsymbol{e}'_1)$.

A l'instant $t' = 0$, les origines sont confondues ($F(0) = O$) et les conditions initiales sont telles que

$$\boldsymbol{u}(0) = c\boldsymbol{e}'_0 \text{ et } \boldsymbol{a}(0) = a\boldsymbol{e}'_1 \text{ avec } a > 0$$

❏ – **1**. Précisez à quoi correspondent physiquement ces conditions initiales.

Par définition, notre mouvement uniformément accéléré s'effectue dans le plan Π engendré par les deux premiers vecteur de base du référentiel fixe, on aura donc $\forall t,\ y'(t) = z'(t) = 0$.

Puisque $(\boldsymbol{e}'_0, \boldsymbol{e}'_1)$ constitue une base de Π et que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{a}$ sont à chaque instant t dans ce plan on peut écrire

$$\boldsymbol{u}(t) = u^0(t)\,\boldsymbol{e}'_0 + u^1(t)\,\boldsymbol{e}'_1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{a}(t) = a^0(t)\,\boldsymbol{e}'_0 + a^1(t)\,\boldsymbol{e}'_1$$

❏ – **2**. En écrivant la conservation des normes de $\boldsymbol{u}$ et de $\boldsymbol{a}$ déterminer les relations entre $u^0(t)$, $u^1(t)$ et c d'une part et $a^0(t)$, $a^1(t)$ et a d'autre part.

❏ – **3**. Par définition de la 4–accélération, avec les notations introduites on a $\boldsymbol{a}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}$. En déduire une première relation entre $a^0(t)$, $u^1(t)$ et $\dfrac{du^1}{dt}$, puis, en éliminant $a^0(t)$ grâce à la conservation de la norme de $\boldsymbol{a}$, obtenir une équation différentielle non linéaire du premier ordre à variables séparables vérifiée par $u^1(t)$.

❏ – **4**. En déduire les expressions de $u^1(t)$ et $u^0(t)$ en fonction de t, c et a. On rappelle que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \arg\mathrm{sh}\,(x) + K \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

❏ − **5**. Par définition de la 4–vitesse, avec les notations introduites on a $\boldsymbol{u}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$. En déduire les deux seules coordonnées $x^0(t)$ et $x^1(t)$ non identiquement nulles de $\boldsymbol{x}$ dans la base $(\boldsymbol{e}'_0, \boldsymbol{e}'_1)$

Ces quantités sont les composantes contravariantes non nulles de la 4–position de la fusée dans le référentiel fixe. Plus explicitement on écrira $(ct', x') = \left(x^0(t), x^1(t)\right)$. Ces relations sont celles qui généralisent la transformation de Lorentz dans notre changement de référentiel accéléré. Ce n'est plus une transformation linéaire !

❏ − **6**. En éliminant le temps propre t dans la fusée entre ces deux relations déterminer une relation de la forme $f(x', t') = 0$ ne faisant apparaître que les paramètres a et c. Quelle est la nature de la courbe implicite $f(x', t') = 0$ dans le plan Π. Que devient cette courbe en mécanique newtonienne ?

❏ − **7**. En utilisant cette relation, obtenir la loi horaire $x'(t')$ et en déduire la composante de la vitesse de la fusée $v'(t') = \frac{dx'}{dt'}$ sur cet axe dans $\mathcal{R}'$. Vérifiez diverses propriétés de cohérence de cette vitesse.

❏ − **8**. De la même façon, toujours dans le référentiel $\mathcal{R}'$, déterminer la composante de l'accélération $a'(t') = \frac{dv'}{dt'}$ de la fusée selon $(O'x')$ et commenter ses propriétés.

Applications numériques : Ad Astra !

Pour effectuer un voyage vers un objet cosmique grâce à notre fusée, on part de la terre supposée fixe, on accélère à $1g$ en ligne droite vers cet objet jusqu'à la moitié de sa distance, puis on décélère toujours à $1g$ (simplement en retournant la fusée...) pendant la seconde moitié du voyage. Une fois arrivé on prend une photo et on retourne sur la terre en suivant la même technique.

Avec les notations introduites, la distance totale à parcourir est $x' = d$.

❏ − **9**. En utilisant les résultats obtenus exprimer en fonction de d, a et c, le temps T', mesuré dans le référentiel fixe, mis par la fusée pour parcourir la distance d et revenir sur Terre. En déduire le temps T mesuré par les voyageurs à bord de la fusée pour faire le même voyage, on exprimera toujours T en fonction de d, a et c.

❏ − **10**. Remplir le tableau ci-dessous décrivant le voyage vers des destinations touristiques (Al=Année-lumière):

Destination	Distance à la Terre : d	Durée du voyage vu de la Terre : T'	Durée du voyage à bord : T
Lune	en km	en heures	en heures
α–Centauri	en Al	en années	en années
Centre Galactique	en kAl	en années	en années
Galaxie d'Andromède	en MAl	en années	en années
Bord de l'Univers observable	en GAl	en années	en années

Commentez-les résultats obtenus !

Tout ceci est-il réalisable ? Que pensez-vous du pilotage d'une telle fusée ?