Une copie double maximum...

Quelques propriétés simples

1 Géométrie algébrique

Démontrer les affirmations suivantes et **proposer** si possible des interprétations physiques pour chacune de ces propriétés :

$\boxed{\mathscr{P}_1}$ Si deux évènement sont séparés par un intervalle de genre temps (resp. espace), alors il existe un référentiel dans lequel il se produisent au même endroit (resp. simultanés) et il n'existe aucun référentiel dans lequel ils sont simultanés (resp. se produisent au même endroit).

$\boxed{\mathscr{P}_2}$: Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des évènements de genre temps pointés vers le futur (i.e. $x^0 > 0$ et $y^0 > 0$) laquelle de ces deux propriétés est vraie :

- ils sont séparés par un intervalle de genre temps;
- leur produit scalaire est positif.

Que devient cette propriété lorsque $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des évènements de genre espace ?

$\boxed{\mathscr{P}_3}$: Soit $\boldsymbol{x}$ un évènement de genre temps, si $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ alors $\boldsymbol{y}$ est un évènement de genre espace.

$\boxed{\mathscr{P}_4}$: Soit $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux évènement de genre lumière :

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \text{ et } \boldsymbol{y} \text{ sont colinéaires.}$$

$\boxed{\mathscr{P}_5}$: Le cône du futur (resp. passé) est convexe.

2 Algèbre

Quelques relations pour jouer!

$\boxed{\mathscr{R}_1}$ Démontrer que $\partial^\mu x^\nu = \eta^{\mu\nu}$, en déduire que $\partial^\mu x'^\nu = \mathscr{L}^{\nu\mu}$

$\boxed{\mathscr{R}_2}$ Déterminer l'inverse de $\mathscr{L}^{\mu\nu}$

$\boxed{\mathscr{R}_3}$ Soit X un tenseur d'ordre 2 et Y un 4-vecteur tels que $X_{\mu\nu} = Y_{\mu,\nu} - Y_{\nu,\mu}$. Montrer que le tenseur dont la composante complètement covariante est donnée par $D_{\mu\nu\rho} = X_{[\mu\nu,\rho]}$ est le tenseur nul d'ordre 3. On rappelle que la notation entre crochet indique qu'il faut additionner toutes les permutations circulaires concernées :

$$X^{[i_1 i_2 \cdots i_k]} = X^{i_1 i_2 \cdots i_k} + X^{i_2 i_3 \cdots i_k i_1} + X^{i_3 i_4 \cdots i_k i_1 i_2} + \cdots + X^{i_k i_1 \cdots i_{k-1}}$$