Devoir maison de théorie des champs n°5

Une affaire de dimension

Selon Sheldon Cooper la théorie des cordes serait l'avenir de la physique théorique et donc par extension de la théorie des champs. Dans le cadre de cette théorie, les particules ponctuelles de la physique sont représentées par des objets unidimensionnels appelés *cordes*. La théorie décrit comment ces cordes se propagent dans l'espace et interagissent les unes avec les autres, la tension de ces cordes déterminant les propriétés physiques des particules qu'elles représentent.

Pour que cette théorie ait un sens (au moins mathématique), il est nécessaire que la partie spatiale de l'espace temps possède plus que 3 dimensions, exactement 9 dans les théories les plus simples.

Pour que cette théorie décrive la nature, et soit donc de la physique, il est par conséquent nécessaire que l'univers dans lequel nous vivons possède ces dimensions supplémentaires sous une forme ou sous une autre.

Un moyen concret de tester cette éventualité il est possible de faire des expériences gravitationnelles !

I Pour entrer dans le sujet...

❏ – **1**. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{x}|^2}\ d\boldsymbol{x} \tag{1}$$

Calculer I_2 en passant en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^2$:

❏ – **2**. Montrer que $I_n = (I_1)^n$ et en déduire la valeur de I_n

❏ – **3**. En passant en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{lcl} x_1 = r\sin\theta_{n-1}...\sin\theta_3\sin\theta_2\cos\theta_1 & & \dots \\ x_2 = r\sin\theta_{n-1}...\sin\theta_3\sin\theta_2\sin\theta_1 & ... & x_{n-1} = r\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2} \\ x_3 = r\sin\theta_{n-1}...\sin\theta_3\cos\theta_2 & & x_n = r\cos\theta_{n-1} \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

avec $r = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ et $\theta_1, ..., \theta_{n-1}$ les angles d'Euler de $\mathbb{R}^n$, on montre facilement que

$$I_n = |S_{n-1}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \tag{2}$$

ou $|S_{n-1}|$ représente la surface de l'hypersphère de dimension n. En utilisant le résultat de la question précédente calculer $|S_{n-1}|$. On rappelle à toutes fins utiles les propriétés de la fonction Γ d'Euler

$$\forall z \in \mathbb{R}_*^+ \quad \Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{z-1} ds \ \ , \ \Gamma(1/2) = \pi^{1/2} \text{ et } \ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

❏ – **4**. On se limitera à présent au cas $n > 1$, et on considère l'opérateur laplacien en dimension n noté $\Delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Montrer que pour toute fonction radiale f de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire telle que

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & f(|\boldsymbol{x}|) := f(r) \end{array} \tag{3}$$

on a $\Delta_n f = \dfrac{d^2 f}{dr^2} + \dfrac{n-1}{r}\dfrac{df}{dr} = \dfrac{1}{r^{n-1}}\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{df}{dr} r^{n-1}\right)$.

❏ – **5**. On appellera fonction de Green du laplacien radial, une fonction g_n radiale, telle que pour toute fonction radiale φ infiniment dérivable et à support compact [1],

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{r\to+\infty} g_n(r) = 0 & \text{si } n>2 \\ \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{g_n}{r} \leq 1 & \text{si } n=2 \end{array} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} g_n\, \Delta_n\left(\varphi\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\, d\boldsymbol{x} = \varphi(0) \tag{4}$$

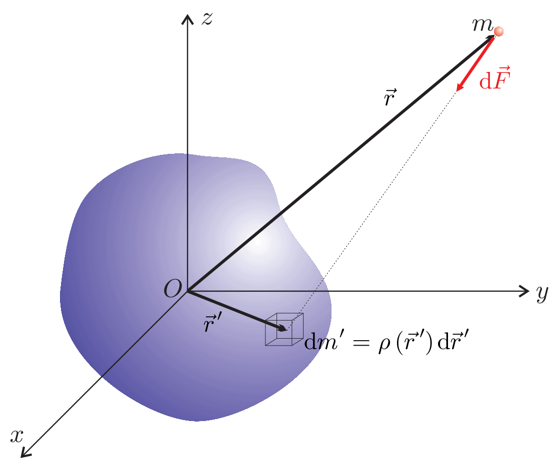
Il en résulte que g_n vérifie $\Delta_n g_n = \delta$ au sens des distributions. Déterminer g_n (on ne pose pas la question de l'unicité ...)

Indications : On se souviendra du passage de (**??**) à (**??**) valable pour toute fonction radiale, on pourra utiliser (**??**) , puis remarquer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{dr} dr = -\varphi(0)$$

II La gravitation non relativiste et non quantique

On considère un volume fini Ω de $\mathbb{R}^3$, dans lequel une masse est répartie continûment selon la densité volumique de masse $\rho(\vec{r})$.



Cette densité correspond à celle que l'on obtient dans le cadre de la physique statistique en considérant la version probabiliste [2] de la distribution de N masses $(m_\alpha)_{1\leq\alpha\leq N}$ ponctuelles repérées par les vecteurs $(\vec{r}_\alpha)_{1\leq\alpha\leq N}$.

❏ – **6**. Exprimer en fonction des vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ l'expression de la force de gravitation $\mathrm{d}\vec{F}$ qu'exerce la masse $\mathrm{d}m'$ sur la masse m. En appliquant le principe de superposition, en déduire l'expression de force de gravitation $\vec{F}$ exercée par l'ensemble de Ω sur m.

❏ – **7**. Montrer que cette force dérive d'un champ de gravitation noté $\psi(\vec{r})$: c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire $\vec{F} = m\ \vec{\nabla}_{\vec{r}}(\psi)$ avec

$$\psi : \begin{array}{lll} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{r} & \mapsto & \psi(\vec{r}) = -G\displaystyle\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^a}\mathrm{d}\vec{r}' \end{array} \quad \text{on précisera la valeur de l'entier } a$$

❏ – **8**. En déduire que le champ de gravitation dans l'espace tridimensionel classique s'écrit sous la forme $\psi = k\ G\ \rho * g$ où :

— la notation $*$ désigne le produit de convolution des fonctions ;

1. Cette fonction φ est appelée une fonction test dans la théorie des distributions.
2. Pour le détail de ce passage à la limite dans des cas simples on pourra consulter le document suivant : `https://physique.ensta-paris.fr/PA102/phystat2mecaflu.pdf`

— k est une constante que l'on peut identifier comme la valeur de la surface de l'hypersphère unité dans un espace dont on précisera la dimension ;

— g la fonction de Green du laplacien radial dans ce même espace.

Cette façon d'écrire le champ de gravitation permet de l'interpréter comme une propriété de l'espace isotrope de la mécanique classique : à travers cette relation, on voit en effet que le champ ψ peut s'interpréter comme la réponse de l'espace (à travers la fonction de Green du laplacien) lorsqu'il est sollicité par la présence d'un champ de masse qui peut s'interpréter alors comme l'entrée ou la source de la gravitation.

Le problème posé par cette définition est qu'elle est fondamentalement classique (non relativiste) car la réponse $\psi(\vec{r}, t)$ se fait dès l'instant où l'on introduit l'entrée $\rho(\vec{r}, t)$ dans l'espace... Il faudra attendre la relativité générale pour obtenir une version correcte de la gravitation prenant en compte les champs intenses et les effets relativistes de changement de référentiels.

Si la physique est cohérente, on peut néanmoins penser que la définition du champ de gravitation obtenue à la question **8** se généralise dans un espace de dimension quelconque tant que des effets quantiques inévitables ne sont pas trop importants...

❏ – **9**. Proposez une expérience simple (à comprendre mais sans aucun doute difficile à réaliser) permettant de tester la contrainte dimensionnelle imposée par la théorie des cordes.

III La dimension des sections spatiales de l'espace-temps.

L'espacetemps (en un seul mot...) est le cadre mathématique dans lequel se produisent les évènements de la physique. En relativité générale, il est généralement décrit par une variété riemanienne ; c'est-à-dire une ensemble de points que l'on peut mettre en relation avec un espace vectoriel de dimension fixée. La base de cet espace est spécifique à chaque point et l'on se dote de la possibilité de mesurer des longueurs entre ces points à travers une métrique. En relativité générale, cet espacetemps est de dimension 4 : trois composantes spatiales et une composante temporelle définissent un évènement.

Une section spatiale de l'espacetemps est ainsi une hypersurface à temps constant de l'espacetemps, que l'on pourra appeler ici l'espace !

Nous proposons dans cette partie de mesurer la dimension n ce ces hypersurfaces. Rien que ça !!!

Pour garder le suspense, nous nous placerons dans le cas général dans lequel cette dimension est un entier n que l'on cherche à déterminer.

Comme nous n'avons pas encore fait de relativité générale, on se place dans sa limite faible énergie qui est censée être la mécanique classique. Tous les points de l'espacetemps partagent le même temps t qui devient ainsi un paramètre privilégié... Tous les points de l'espace peuvent être décrit dans le même espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ avec une unique base de référence formant (dès que l'on a choisit une origine) un référentiel galiléen unique couvrant tout l'espace...

On considère un système constitué de N particules de masses $m_{\alpha=1,\cdots,N}$, repérées dans l'espace $\mathbb{R}^n$ par leurs positions $\boldsymbol{x}_{\alpha=1,\cdots,N}$ relativement au référentiel galiléen précité. On définit également les énergies cinétique T et potentielle U totales de ce système

$$T(\dot{\boldsymbol{x}}_1, \cdots, \dot{\boldsymbol{x}}_N) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \ \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\alpha}} \text{ et } U(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) = \sum_{\beta=1}^{N} m_\beta \, \psi(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\beta}}) \tag{5}$$

où le champ de gravitation ψ est celui associé à un espace de dimension n bien sûr !

Les quantités T et U sont des champs scalaires car ce sont des fonctions de $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$. Le système considéré n'est soumis à aucune autre force.

❑ – **10**. Une fonction $f\ : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est dite homogène de degré k si pour tout réel λ et pour tout vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ de son domaine de définition on a $f(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda^k f(\boldsymbol{u})$. Démontrer qu'alors

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{u}}(f) = k\ f(\boldsymbol{u})$$

Indication : on pourra éventuellement faire la démonstration dans le cas $m = 1$ et généraliser ensuite...

❑ – **11**. Vérifiez que T et U sont des champs scalaires homogènes, on précisera le degré de chacun.

❑ – **12**. Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}$ de ce système, déterminer les impulsions $\boldsymbol{p}_{\alpha=1,\cdots,N}$ puis le hamiltonien $\mathcal{H}$ de ce système

❑ – **13**. On définit la valeur moyenne temporelle $\overline{f}$ d'une fonction $f\ (\boldsymbol{u}, t)$ par la relation

$$\overline{f}(\boldsymbol{u}) = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(\boldsymbol{u}, t)\, dt$$

En utilisant les équations de Hamilton et l'homogénéité de T et U, montrer que pour $n > 2$, il existe toujours une constante α_n que l'on déterminera, telle que $\overline{T} + \alpha_n \overline{U} = 0$. Comment s'appelle ce résultat lorsque l'espace est de dimension 3 et que vaut α_3 ?

Pour une galaxie ou un amas d'étoile on peut estimer les énergies cinétique et potentielle moyennes totales avec les relations

$$\overline{T} = \frac{1}{2} M v^2 \quad \text{et}\ \overline{U} = -\frac{GM^2}{R}$$

où M est la masse totale de l'amas, R son rayon caractéristique et v la vitesse caractéristique moyenne des étoiles dans l'amas. Grâce à de patients, difficiles et controversés relevés les astrophysiciens on pu mesurer les valeurs suivantes :

Type d'amas	Masse totale [1 $M_\odot = 2.10^{30}$kg]	Rayon caractéristique visible	Vitesse moyenne observée pour les étoiles
Amas ouvert Les pléaides, M41	412 $M_\odot$ (Somme)	6 pc	$0,56$ km $\cdot$ s^{-1}
Amas globulaire Amas d'Hercule, M13	$4 \times 10^5\ M_\odot$	$10^{1,7}$ pc	6 km $\cdot$ s^{-1}
Galaxie spirale Andromède, M31	$4 \times 10^{11}\ M_\odot$	30 kpc	250 km $\cdot$ s^{-1}

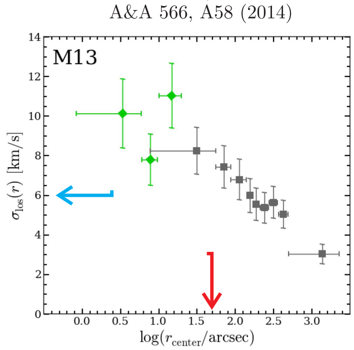
Etant donné que ces mesures sont délicates je vous donne mes sources .

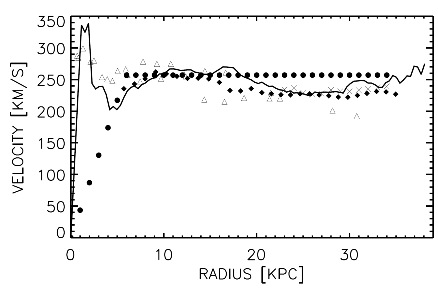
Pour les pleaides, j'ai pioché les valeurs dans l'article : *Investigation of the Pleiades cluster*, D. Raboud and J.-C. Mermilliod, 1998,A&A,329,101 (arxiv :astro-ph/9708144).

Pour M13 et M41 je me suis servi des courbes de vitesse visible (i.e. hors matière noire) : Pour M13 j'ai pris des valeurs moyennes (j'ai indiqué les valeurs choisies par des flèches) et pour Andromède j'ai pris la valeur plateau et la taille maximale observée.

Courbe de vitesse M13

S. Kamann, et al., *The central dynamics of M3, M13, and M92*
A&A 566, A58 (2014)





Courbe de vitesse M31

Chemin, L., et al., *HI Kinematics and Dynamics of Messier31.*
ApJ, 705, p:1395–1415, 2009

❑ – **14**. En analysant ces résultats déterminer la dimension de l'espace dans lequel nous semblons vivre !