

Devoir Maison 2 – Temps estimé : 3 heures après un bon couscous !

Le vecteur de Lagrange-Lenz-Runge-Laplace-Hermann et la symétrie de Noether associée

Consigne stricte : Votre production doit être bien présentée, bien écrite et faire ressortir vos résultats. Mais elle ne pourra pas s'étendre au delà d'une page A4 recto-verso, sans quoi elle ne sera pas corrigée!

A - Une constante du mouvement très particulière.

On considère une particule ponctuelle de masse m repérée par un vecteur position $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ et soumise à une force de la forme $\vec{F} = -\text{grad} V(r)$ avec $r = \|\vec{r}\|$.

- 1] Montrer que le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{r}}{dt}$ de la particule est conservé et en déduire que le mouvement est plan.
- 2] Ecrire le lagrangien. En déduire les équations du mouvement de la particule.
- 3] Montrer que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = - \frac{\vec{r} \wedge \left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \right)}{r^\alpha}$$

où l'on déterminera l'entier positif α .

- 4] On introduit l'impulsion de la particule $\vec{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vec{r}}{dt}}$ qui vaut ici $\vec{\pi} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$, montrer que

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{\pi} \wedge \vec{L} \right) = mr^2 \frac{dV}{dr} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

- 5] On se place dans tout le reste du problème dans le cas du potentiel de Kepler attractif $V(r) = -\frac{k}{r}$ avec $k > 0$, montrer que le vecteur $\vec{A} = \vec{\pi} \wedge \vec{L} - km \frac{\vec{r}}{r}$ est une intégrale première du mouvement. Calculer $\vec{A} \cdot \vec{L}$, que peut-on en conclure sur le vecteur \vec{A} .

Le découvreur de ce vecteur est bien évidemment Joseph-Louis Lagrange, mais les auteurs de contributions à son sujet sont Laplace, Lenz, Runge et plus récemment Hermann.

Formulaire pour la partie A

- $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$
- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$

B - La symétrie de Noether associée.

On considère un corps M de masse m en orbite képlérienne dans le champ gravitationnel créé par un corps de masse m_F situé en un point F . On suppose que l'énergie de M est négative, sa trajectoire est donc l'ellipse représentée sur la figure 1.

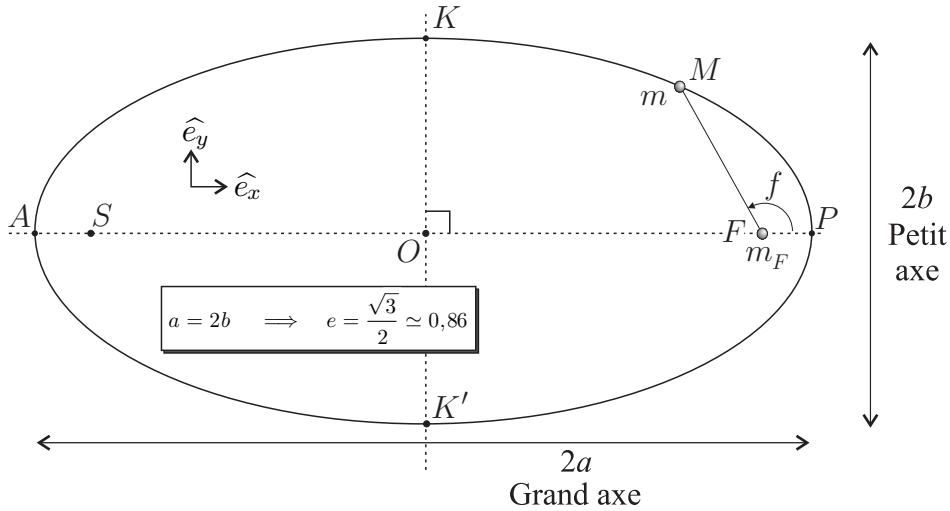


Figure 1: Caractérisation de la trajectoire

6 On rappelle qu'une ellipse d'excentricité e et de demi-grand axe a est l'ensemble des points M tels que $\|\vec{MF}\| + \|\vec{MS}\| = \Upsilon = \text{cte}$ avec $\|\vec{FS}\| = 2ae$. Déterminer la constante Υ en se plaçant en un point particulier de la trajectoire. Montrer que $\|\vec{KF}\| = a$. Déterminer, en fonction de l'excentricité e , les expressions de $\cos f$ et $\sin f$ lorsque M est en K . En déduire la valeur de f en ce point pour l'ellipse de la figure 1.

7 On rappelle que $\vec{r} = r(\cos f \hat{e}_x + \sin f \hat{e}_y)$ avec $r = p(1 + e \cos f)^{-1}$. Montrer que le vecteur vitesse $\vec{v}(M) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{df}{dt} \frac{d\vec{r}}{df}$ se met sous la forme

$$\vec{v}(M) = \lambda(e \hat{e}_y - \sin f \hat{e}_x + \cos f \hat{e}_y)$$

où λ est une constante que l'on exprimera en fonction de $L = \|\vec{r} \wedge m\vec{v}\|$, m et p . On pourra exprimer $\frac{dr}{df}$ en fonction de e , r , p et $\sin f$. En déduire que le vecteur vitesse parcourt un cercle que l'on déterminera. Ce cercle est appelé cercle des vitesses ou hodographe de cette orbite.

8 En écrivant l'expression de l'énergie $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{m\mu}{r}$ au périégée et à l'apogée, déduire l'expression de la constante $\mu = GM_F$ en fonction de L , m et p . En déduire une expression de L en fonction de m , p , E et e .

9 En utilisant les résultats des questions précédentes montrer que la vitesse en K et en K' n'est portée que par le vecteur \hat{e}_x et que son module ne dépend que de E et m .

Lorsqu'il est en K et en conservant son vecteur vitesse, on transfère instantanément le point M en un point K_φ obtenu en lui appliquant une rotation d'angle φ autour du point F dans le plan orbital (voir figure 2).

- 10 Montrer que la nouvelle trajectoire est toujours une ellipse.
- 11 Déterminer le petit axe, le grand axe et l'excentricité de cette nouvelle ellipse. Calculer leurs nouvelles valeurs sur l'exemple de la figure 2 et tracer cette nouvelle orbite.

On considère la famille \mathcal{F}_E des cercles des vitesses que l'on obtient en faisant varier l'angle φ . On démontre que \mathcal{F}_E correspond à toutes les orbites possédant l'énergie E , cette famille est appelée l'hodographe des orbites d'énergie E .

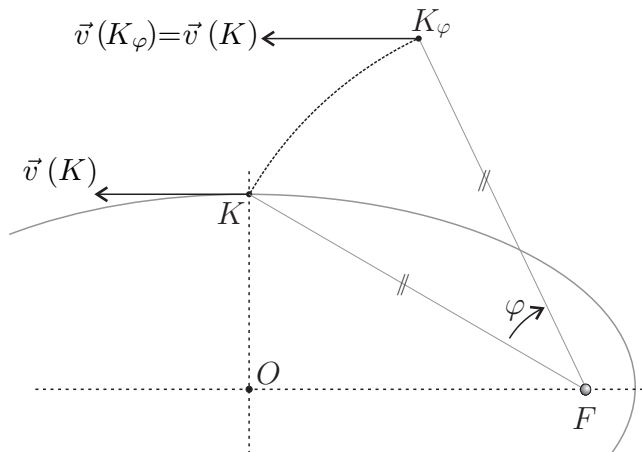


Figure 2: Transport du point en conservant sa vitesse, sur la figure $\varphi = \pi/6$ dans le sens horaire.

- 12 Déterminer les caractéristiques du cercle des vitesses de la nouvelle orbite. En généralisant, tracer \mathcal{F}_E .

On appelle projection stéréographique d'une sphère (dans \mathbb{R}^3 , notée \mathcal{S}_2) sur un plan, l'application illustrée sur la figure 3 telle que, par exemple, l'image de z_1 est z'_1 . Il s'agit d'une transformation conforme, l'image d'un cercle est donc un cercle.

- 13 De quels cercles sur la sphère \mathcal{S}_2 , la famille \mathcal{F}_E est-elle l'image dans le plan par projection stéréographique. Quelle transformation de la sphère laisse globalement invariante \mathcal{F}_E ?

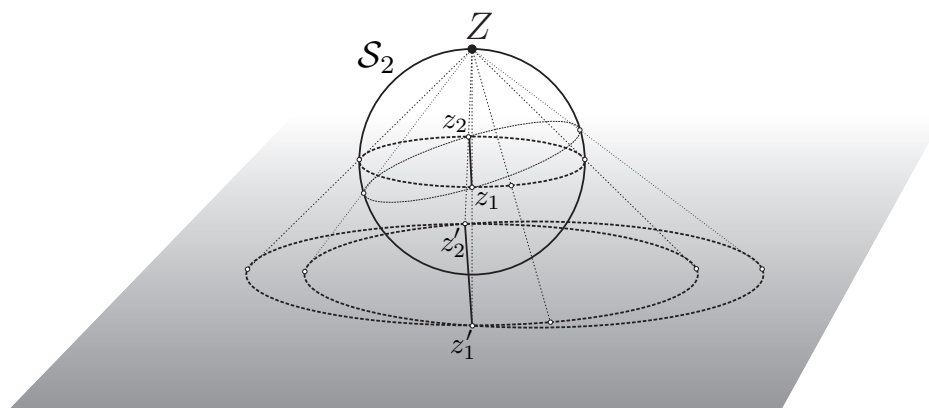


Figure 3: Projection stéréographique.

En généralisant à toutes les valeurs possibles de l'énergie et en prenant en compte tous les plans orbitaux possibles associés aux différentes valeurs possibles du moment cinétique, l'hodographe devient une collection de sphères.

- 14 De quelle projection stéréographique généralisant celle de la question précédente, cet hodographe est-il l'image. Quelle est la symétrie correspondante ?

On montre que cette symétrie est la symétrie de Noether associée à la conservation du vecteur