Devoir Maison 1

Le problème des deux corps par la géométrie

Consignes : *Faire la partie A pour comprendre les bases théoriques de la méthodes.* ***Rédiger la solution de cette partie sur une seule feuille A4 maximum****. Puis, rendre également les 4 dessins complétés de la partie B effectués uniquement à la règle (non graduée) et au compas qui sont les seuls intruments autorisés pour résoudre ce problème. Attention Newton surveille de là-haut !*

On considère une masse m dans le champ de gravitation d'un masse M. On note $\vec{r} = \overrightarrow{Mm}$ le vecteur position reliant ces deux masses à chaque instant, selon la loi de la gravitation universelle de Newton on aura

$$m\dot{\vec{v}} = -\frac{\mu m}{r^2}\vec{e}_r \quad \text{avec à chaque intant } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \text{ et } \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

A Mise en place

1. Dans quelle(s) condition(s) peut-on prendre $\mu = GM$? On se placera dans ce cas pour la suite de l'examen.

2. Montrer que le vecteur $\vec{r}$ reste dans un plan que l'on caractérisera. On note (r, θ) les coordonnées polaires dans ce plan et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base orthonormée polaire locale mobile.

3. Exprimer $\vec{e}_r$ en fonction de $\dot{\vec{e}}_\theta$, puis r^2 en fonction du module L du moment cinétique de m par rapport à M, afin d'obtenir une relation de la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v} - \vec{u}\right) = \vec{0}$$

   dans laquelle on constatera que $\vec{u}$ est proportionnel à l'un des deux vecteurs de la base polaire locale, on notera k le coefficient constant de cette proportionalité et on l'exprimera en fonction de G, M, m et L.

4. Le vecteur $\vec{h} = \vec{v} - \vec{u}$ est connu sous le nom de vecteur de Hamilton. Caractériser géométriquement l'hodographe des vitesses (lieu des extrémités du vecteur vitesse $\vec{v}$) en fonction de $\vec{h}$ et $\vec{u}$.

5. En calculant $\vec{u} \cdot \vec{h}$, démontrer que la trajectoire est une conique dont on précisera les paramètres.

6. Le vecteur de Lagrange est défini par la relation $\vec{A} = \vec{h} \wedge \vec{L}$. Montrer que $\vec{A}$ est le vecteur directeur d'une droite qui est un axe de symétrie de la trajectoire.

7. Déterminer l'énergie massique de m en fonction de $\vec{h}$ et $\vec{u}$.

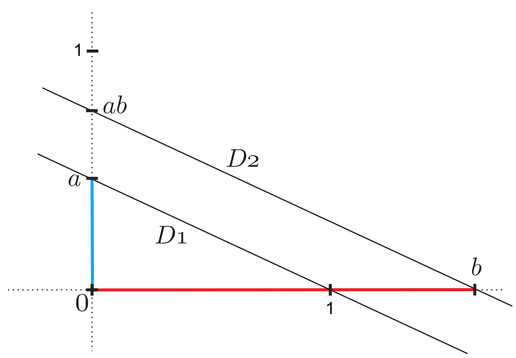
Dans de nombreux cas en astronomie, on ne mesure en fait que la position et la vitesse d'un corps à un instant de son orbite. Nous allons voir à présent comment obtenir géométriquement le reste de cette orbite en faisant uniquement l'hypothèse d'une force newtonienne. Nous n'utiliserons qu'une règle et un compas, seuls instruments graphiques à la disposition des astronomes pendant des siècles !

B Construction de l'orbite à la règle et au compas

Pour toutes les réponses de cette partie, on utilisera les 4 figures fournies que l'on completera à la règle et au compas après les avoir imprimées. On expliquera succintement par écrit au dos de chaque figure pour chaque construction les différentes étapes de celles-ci.

La figure 1 représente à un instant $t = 0$, les vecteurs position et vitesse d'une particule de masse m dans le champ de gravitation d'une masse M. Le système d'unité choisi est tel que $m = 1$ et $GM = 1$. Cette longueur unité a été représentée sur le graphique ainsi qu'une base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Pour cette représentation on a choisit l'origine des vitesse en M mais le vecteur $\vec{v}_0$ représente bien la vitesse de la particule de masse m.

8. Construire à la règle et au compas sur la figure 1, la longueur L du moment cinétique de cette particule. On effectuera cette construction sur la figure 1 et on vérifiera que la valeur de cette longueur est particulièrement simple. A toutes fins utiles on rappelle ci-dessous la construction à la règle et au compas d'un produit de deux nombres a et b si l'on connait la longueur unité.



Le repère (O,x,y) est orthonormé.

1) On construit la longueur b sur l 'axe Ox.
2) On construit la longueur a sur l 'axe Oy.
3) On construit la droite D_1 reliant a à l 'unité sur Ox
4) On construit la droite D_2 parallèle à D_1 passant par b.

D_2 coupe l 'axe Oy en un point ab, dont la distance à l 'origine est le produit de a par b.

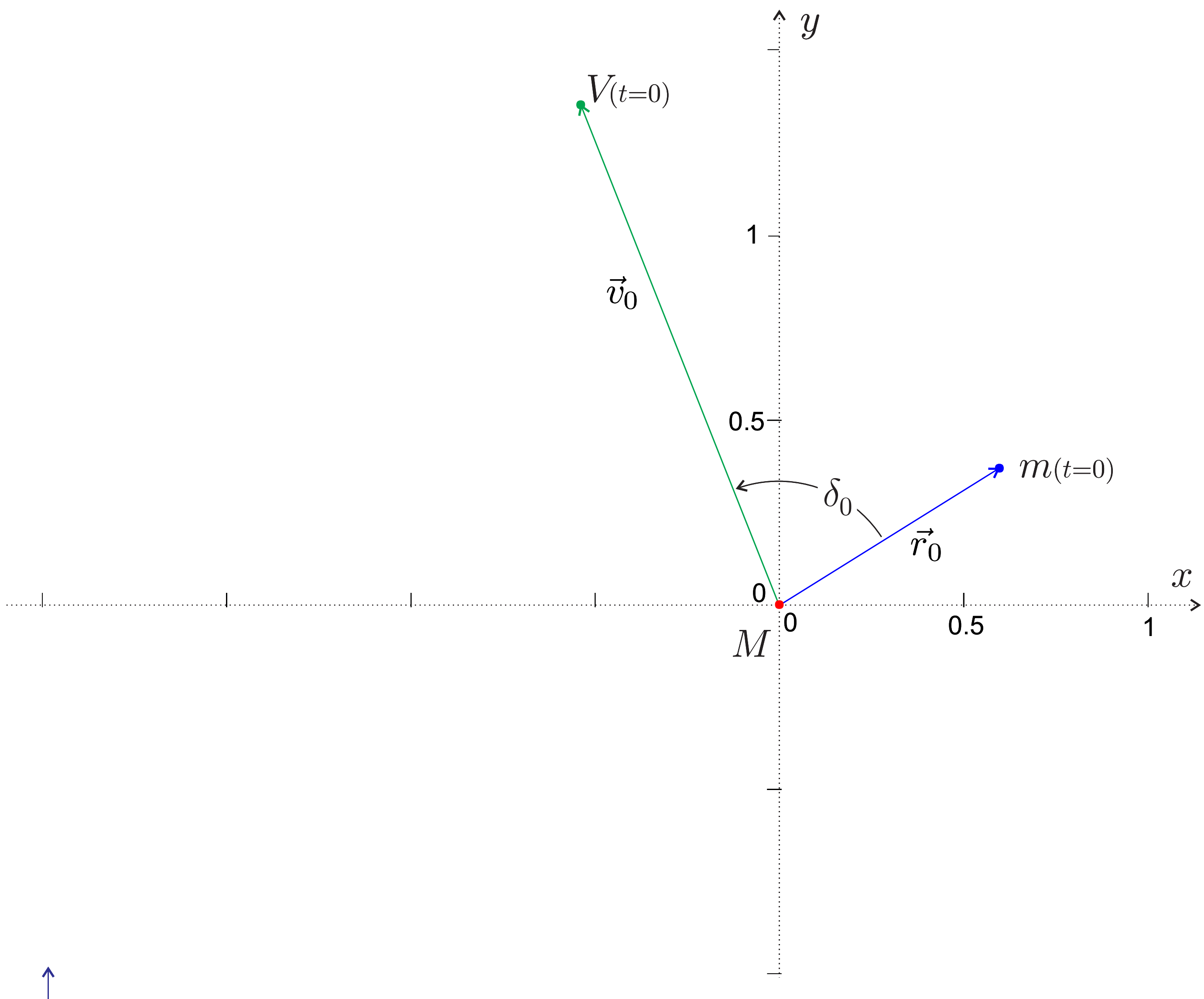
9. Construire le vecteur de Hamilton $\vec{h}$ sur le graphique de la figure 2. En déduire la construction sur cette même figure de l'hodographe des vitesses (lieu des extrémités du vecteur vitesse).

10. Construire le vecteur de Lagrange sur la figure 2.

11. Construire sur la figure 3, un autre point $m(t)$ de la trajectoire à partir de sa vitesse $\vec{v}_t$ que l'on choisira arbitrairement sur l'hodographe puis en appliquant des constructions semblables au précédentes mais dans le sens inverse.

12. Tracer sur la figure 4, l'orbite complète du point m à partir de points caractéristique de celle-ci.

Feuille de figures à remettre avec sa copie **Nom :**



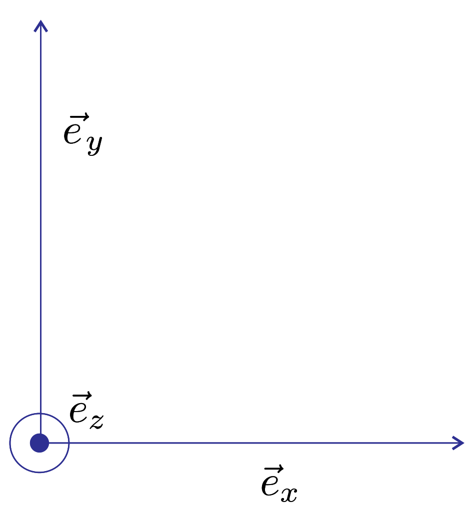


Figure 1 : Mesure de L

Feuille de figures à remettre avec sa copie **Nom :**

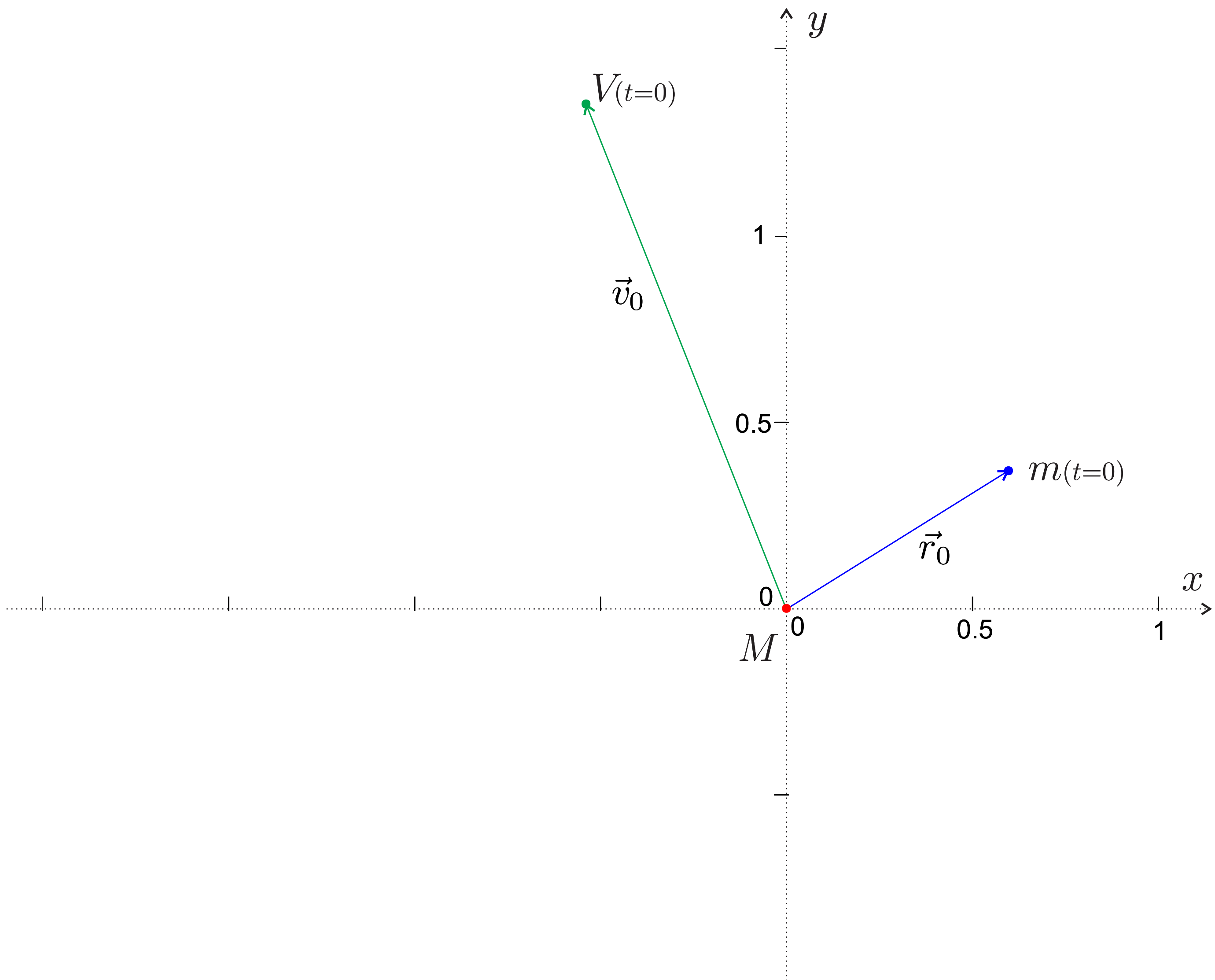
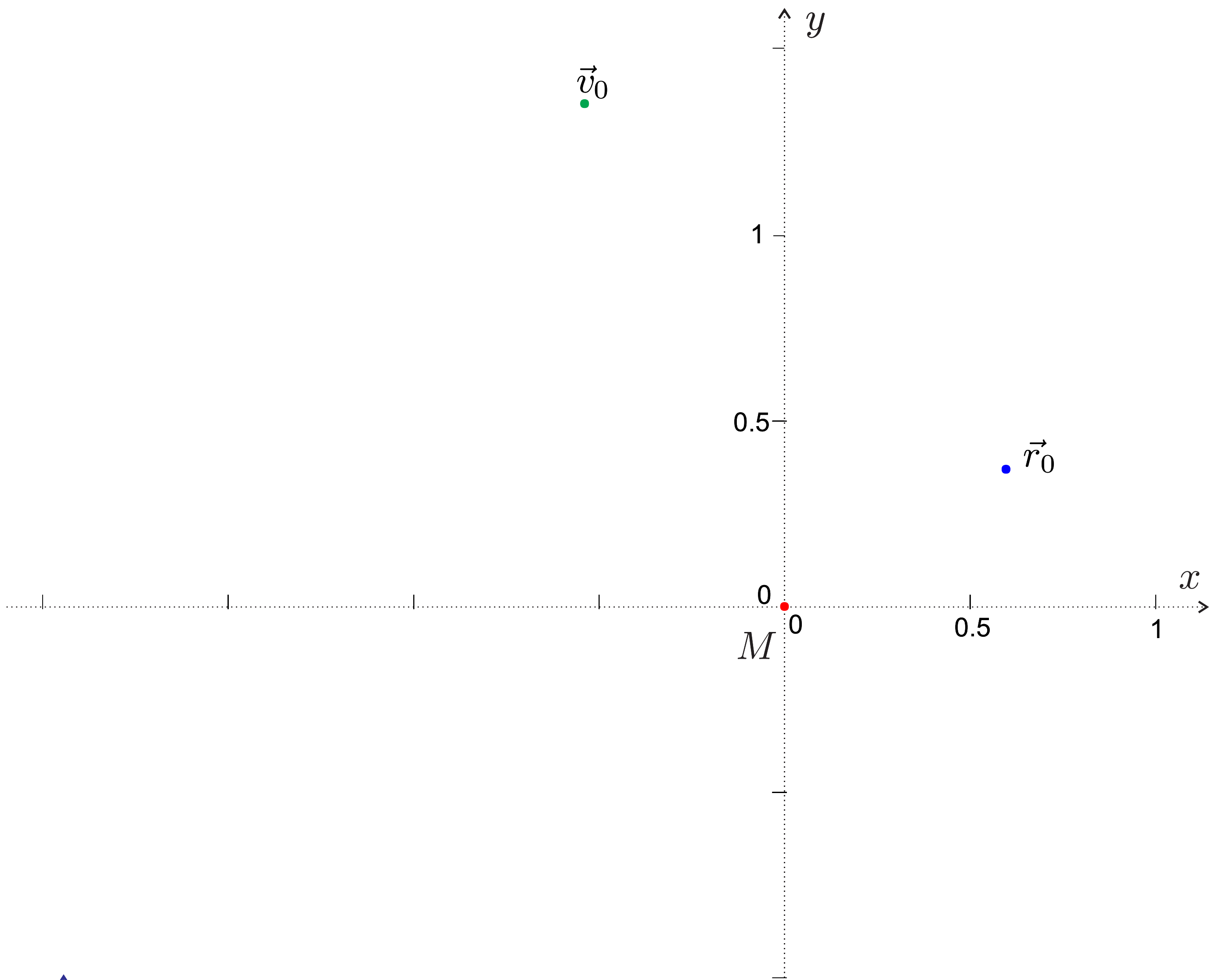


Figure 2 : Construction de $\vec{h}$ et de l'hodographe

Feuille de figures à remettre avec sa copie **Nom :**



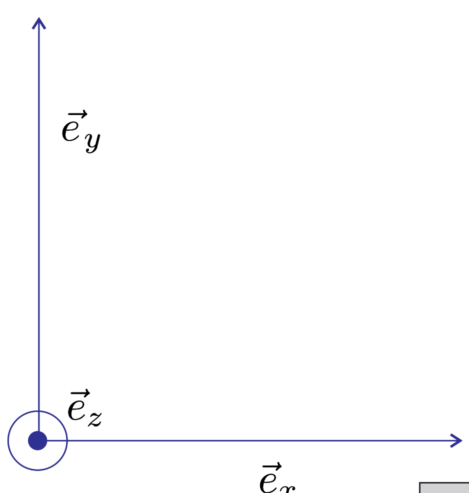
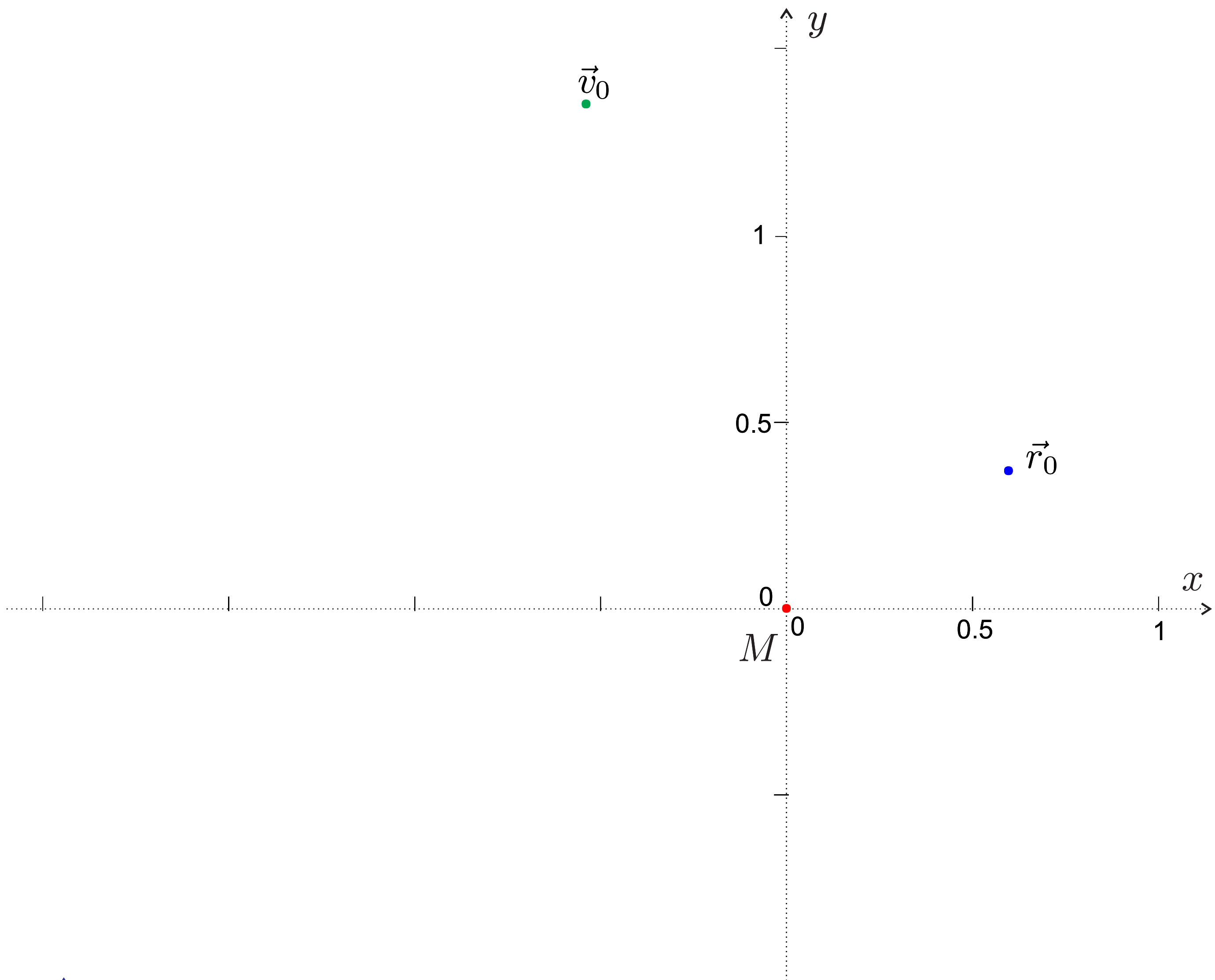


Figure 3 : Construction d'un autre point de l'orbite

Feuille de figures à remettre avec sa copie **Nom :**



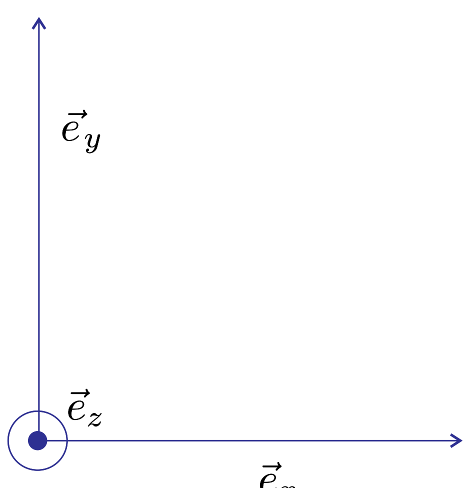


Figure 4 : Construction de l'orbite