Durée : 3 h.
Tous documents autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation : on utilisera les notations proposées et **on justifiera soigneusement les réponses.**

Exercice 1. Lois de conservation

Indiquer si les réactions suivantes sont possibles dans le cadre du Modèle Standard de la physique des particules. Justifier précisément la réponse : pour celles qui sont possibles, indiquer la ou les interactions mises en jeu, pour celles qui ne le sont pas, indiquer les lois de conservation qui ne sont pas respectées.
On ne vérifiera pas la conservation du moment cinétique total.

1. $Z^0 \to e^+ + e^-$ 2. $\Lambda^0 \to p + e^- + \bar{\nu}_e$
3. $\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$ 4. $p \to \pi^+ + \pi^0$
5. $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ 6. $K^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

On donne les masses suivantes en MeV/c^2 :
$m_{Z^0} = 91200 \quad m_e = 0{,}511 \quad m_{\Lambda^0} = 1120 \quad m_p = 938 \quad m_{\pi^\pm} = 140 \quad m_\mu = 106 \quad m_{\pi^0} = 135 \quad m_K = 494$

Le Λ^0 est composé des quarks *u*, *d* et *s*. Le K^- est composé d'un quark *d* et d'un antiquark $\bar{u}$.

Exercice 2. Représentation de Newton-Wigner

On considère l'équation de Dirac : $i\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = H_D \psi$, où $H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ avec les notations du cours :

$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$; $\beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$. On pose $\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$.

1. Ecrire l'équation de Dirac sous la forme d'un système de deux équations sur les spineurs ψ_a et ψ_b.

On constate que les spineurs ψ_a et ψ_b sont couplés, ce qui rend difficile l'élimination pure et simple des solutions d'énergie négative parce qu'elles ne sont pas physiques. On cherche donc à trouver deux équations découplées pour se débarrasser des solutions d'énergie négative.

On introduit l'opérateur $U = \sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon + m}} \dfrac{1}{2}\left(1 + \beta \dfrac{H_D}{\varepsilon}\right)$, avec $\varepsilon = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ où $\vec{p}$ est l'impulsion de la solution considérée.

2. Montrer que U est un opérateur unitaire.

3. On change alors de représentation des solutions physiques en posant $\Phi = U\psi$.

Montrer que Φ vérifie une équation de la forme $i\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = H_{NW}\Phi$. Calculer H_{NW}.

4. Montrer que si pose $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \end{pmatrix}$, alors les équations d'évolution de Φ_a et Φ_b sont découplées.

5. La représentation de Newton-Wigner permet ainsi de découpler les solutions d'énergie positive et négative. A votre avis, pourquoi cela n'a-t-il pas suffi à écarter les solutions d'énergie négative ?

Exercice 3. Désintégration du muon

Dans ce problème, de nombreux résultats intermédiaires sont donnés afin de rendre la plupart des questions indépendantes.

Données : masse du muon : $m_m = 106\ \text{MeV/c}^2$; masse du W : $M_W = 80,4\ \text{GeV/c}^2$.

On se propose de calculer le taux de la désintégration du muon : $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ à l'ordre le plus bas des perturbations.

1. Dessiner le diagramme de Feynman le plus simple décrivant ce processus.

Les quadrivecteurs énergie impulsion des particules seront notés :

p_m pour le muon, p_e pour l'électron, p_1 pour l'antineutrino électron, p_2 pour le neutrino muon et q pour le boson W .

Les indices de spin des fermions seront notés j, k, l, m respectivement pour le muon, le neutrino muon, l'électron, le neutrino électron.

On donne les règles de Feynman utiles ici :

- fermion entrant d'énergie-impulsion p et de spin indexé par j ($j = 1,2$) : $u^j(p)$;
- fermion sortant d'énergie-impulsion p et de spin indexé par j ($j = 1,2$) : $\bar{u}^j(p)$;
- anti-fermion sortant d'énergie-impulsion p et de spin indexé par j ($j = 1,2$) : $v^j(p)$;
- propagateur du W d'énergie-impulsion q : $\dfrac{-i\left(\eta_{\mu\nu} - \dfrac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}\right)}{q^2 - M_W^2 + i\varepsilon}$;
- Vertex W fermions : $\dfrac{-ig}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)$, où les indices des matrices γ aux vertex doivent correspondre aux indices des éléments de la matrice de Minkowski η dans le propagateur du W .

On donne : $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$; $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$; $\gamma^5\gamma^5 = I_4$; $\left\{\gamma^5, \gamma^\mu\right\} = 0$.

2. **On se place dans le référentiel du muon**. Montrer que le propagateur du W peut se réduire à $i\eta_{\mu\nu} / M_W^2$ avec une très bonne approximation.

3. Ecrire l'élément de matrice iM correspondant au diagramme de Feynman représenté.

4. On ne mesure pas la polarisation du muon ni celle de l'électron.

Exprimer $d\Gamma$ en fonction de $\sum_{j,k,l,m=1}^{2} \left|M(j,k,l,m)\right|^2$ où $M(j,k,l,m)$ désigne l'élément de matrice correspondant aux indices de spin indiqués dans la parenthèse respectivement pour le muon, le neutrino muon, l'électron, le neutrino électron.

5. On considère que les neutrinos ont une masse nulle, et on néglige aussi la masse de l'électron.

En déduire : $\sum_{j,k,l,m=1}^{2} \left|M(i,j,k,l,m)\right|^2 = C\,\text{Tr}\left(\not{p}_2\gamma^\mu\left(\not{p}_m + m_m\right)\gamma^\rho\left(1-\gamma^5\right)\right)\text{Tr}\left(\not{p}_e\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\rho\left(1-\gamma^5\right)\right)$.

On rappelle la notation barrée : $\not{p} = \sum_{\mu=0}^{3}\gamma^\mu p_\mu$.

On rappelle :

- l'identité : $\bar{u}_i\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)u_j\bar{u}_j\gamma^\nu\left(1-\gamma^5\right)v_i = Tr\left(\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)v_j\bar{u}_j\gamma^\nu\left(1-\gamma^5\right)v_i\bar{u}_i\right)$;

- les relations de fermeture :
  - $\sum_{j=1,2} u_j(\vec{p})\bar{u}_j(\vec{p}) = (\not{p} + m)$ et $\sum_{j=1,2} v_j(\vec{q})\bar{v}_j(\vec{q}) = (\not{q} - m)$;
- la trace est une opération linéaire sur les matrices et $Tr(AB) = Tr(BA)$;
- $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$; $\gamma^{1,2,3\dagger} = -\gamma^{1,2,3}$; $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4$; $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.

On donnera la valeur de C, en posant $\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$ (définition historique de la constante de Fermi).

6. On rappelle que la trace d'un nombre impair de matrices γ^μ $(\mu = 0,1,2,3)$ est nulle. On fera attention que $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ est un produit de quatre matrices γ. En utilisant la relation :

$$Tr\left[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\rho\left(1-\gamma^5\right)\right]Tr\left[\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\rho\left(1-\gamma^5\right)\right] = 64\eta^\alpha_\lambda\eta^\beta_\sigma$$

calculer l'expression de $d\Gamma$ en fonction du produit $(p_2 \cdot p_e)(p_1 \cdot p_m)$.

7. On a donc obtenu une relation de la forme :

$$d\Gamma = K\frac{1}{2p_m^0}(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 + p_e - p_m)\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2p_1^0}\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}\frac{d^3\vec{p}_e}{(2\pi)^3 2p_e^0}\left[(p_2 \cdot p_e)(p_1 \cdot p_m)\right].$$

On pose $I^{\alpha\beta} = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{p_1^0}\frac{d^3\vec{p}_2}{p_2^0}\delta^4(p_1 + p_2 + p_e - p_m)\, p_1^\alpha p_2^\beta$ et $(p_m - p_e) = k$.

On se place dans le repère où $\vec{k} = \vec{0}$.

Calculer $\eta_{\alpha\beta}I^{\alpha\beta}$ et $k_\alpha k_\beta I^{\alpha\beta}$.

8. Montrer que $I^{\alpha\beta}$ ne dépend que de k et en déduire la relation : $I^{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6}\left(\eta^{\alpha\beta}k^2 + 2k^\alpha k^\beta\right)$.

9. Exprimer le taux de désintégration du muon à l'ordre le plus bas de perturbation en fonction d'une intégrale sur p_e^0 dans le référentiel du muon.

10. Montrer que, dans l'approximation $m_e = 0$, l'énergie maximale de l'électron émis vaut $m_m / 2$ dans le repère du muon.

11. En déduire le taux de désintégration dans cette approximation.

12. On mesure en unités naturelles : $G_F = 1{,}166 \times 10^{-5}$ GeV^{-2} et $m_m = 105{,}66$ MeV.

Calculer le temps de vie du muon, sachant que le rapport d'embranchement de la désintégration $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ est de 98,6 %. On donne $\hbar = 6{,}582 \times 10^{-22}$ MeV$\cdot$s.

13. La mesure donne $2{,}197 \times 10^{-6}$ s. On constate un petit écart d'environ 1 % avec le calcul. Commentez.