Durée : 2 h 30 min

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation : **on justifiera soigneusement les réponses.**

Exercice 1. Lois de conservation

Indiquer si les réactions suivantes sont possibles dans le cadre du Modèle Standard de la physique des particules. Justifier précisément la réponse : pour celles qui sont possibles, indiquer la ou les interactions mises en jeu, pour celles qui ne le sont pas, indiquer les lois de conservation qui ne sont pas respectées.

On ne vérifiera pas la conservation du moment cinétique total.

1. $e^+ + e^- \to Z^0$
2. ${}^{7}_{4}\mathrm{Be} \to {}^{7}_{5}\mathrm{B} + e^- + \bar{\nu}_e$
3. $\gamma + \gamma \to e^+ + e^-$
4. $\mathrm{n} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \to \mathrm{p} + {}^{14}_{6}C$

On donne les masses suivantes en MeV/c^2 :

$m_e = 0,5 \quad m_\pi = 139,6 \quad m_p = 938,3 \quad m_n = 939,6$

On donne les énergies de liaison **par nucléon** suivantes en MeV/nucléon :

${}^{7}_{4}Be : 5,37 \quad {}^{7}_{5}B : 3,53$

Exercice 2. Zitterbewegung (« Tremblement »)

A. Représentation de Heisenberg

Partant de l'équation de Schrödinger en unités naturelles : $i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$, on pose $\psi(t) = U(t,t_0)\psi(t_0)$.

On suppose H indépendant de t .et inversible.

1. Exprimer $U(t,t_0)$ en fonction de H . En déduire que $U(t,t_0)$ est unitaire.

On définit la représentation de Heisenberg en posant : $\psi_H(t) = U^\dagger(t,t_0)\psi(t) = \psi(t_0)$:

ψ_H est « immobile » (indépendant du temps).

2. Soit une observable A dans la représentation de Schrödinger. Exprimer cette observable (qu'on notera alors A_H) dans la représentation de Heisenberg en fonction de U . Que vaut H_H ?

3. Donner l'équation d'évolution de A_H si A ne dépend pas du temps.

B. Mouvement d'une particule libre

On rappelle l'expression du hamiltonien de Dirac d'une particule libre : $H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m$

Rappel : $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$; $\beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$

4. Montrer que l'opérateur $\vec{p}_H$ est constant.

5. Calculer $[x_H, p_{xH}]$. En déduire $\frac{d\vec{r}_H}{dt}$ ($\vec{r}$ désigne le vecteur de composantes x, y, z).

6. Montrer que $\frac{d\vec{\alpha}_H}{dt} = -\left(\vec{\alpha}_H - \frac{\vec{p}}{H}\right)2iH$. Expliquer la notation $\frac{\vec{p}}{H}$.

7. En déduire les expressions de $\vec{\alpha}_H(t)$ et de $\vec{r}_H(t)$.

8. On constate qu'on ne trouve pas une translation à vitesse constante. Il y a un terme oscillant (« tremblement »). Quel est l'ordre de grandeur de l'amplitude de cette oscillation pour une particule non relativiste de masse m ?

9. Exprimer cette amplitude sans utiliser les unités naturelles.

Exercice 3. Désintégrations des pions

Données : $m_{\pi^+} = 140$ MeV/c^2 ; $m_{\pi^0} = 135$ MeV/c^2 ; $m_\mu = 106$ MeV/c^2 .

1. Les pions positifs se désintègrent préférentiellement selon la réaction : $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Leur durée de vie est $2,6\times10^{-8}$ s . Quelle est l'interaction responsable de cette réaction ? Quelle est la durée de vie du π^- ?

2. Rappeler sans calcul pourquoi la réaction $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ n'est pas plus probable.

3. Les pions et les muons ont été découverts dans les rayons cosmiques. Ces pions ont une énergie moyenne de 1 GeV. Quelle est la vitesse des pions chargés et des muons d'énergie 1 GeV. On exprimera la vitesse en fonction de *c*.

4. Quelle est la distance moyenne que parcourent ces particules avant leur désintégration ?

5. Lesquels des pions et des muons ont une probabilité non négligeable d'arriver au sol s'ils sont produits à une altitude de 10 km ? La durée de vie du muon est $2,2\times10^{-6}$ s .

6. Les pions neutres se désintègrent préférentiellement selon la réaction : $\pi^0 \to \gamma\gamma$. Leur durée de vie est $8,4\times10^{-17}$ s . Justifier qualitativement la différence de durée de vie avec les pions chargés.

Exercice 4. Rayons cosmiques

Lors de phénomènes violents dans l'Univers, des particules de très haute énergie sont émises. La Terre reçoit ainsi un flux de particules appelées rayons cosmiques. Les rayons cosmiques primaires (avant interaction dans l'atmosphère) chargés sont formés en majeure partie de protons (82 %) et de particules α (12 %). L'énergie cinétique de ces particules va de quelques GeV à plusieurs J, mais le spectre décroit très vite avec l'énergie.

On s'intéresse dans cet exercice aux protons de quelques GeV, de loin les plus nombreux.

1. Quelle est la longueur d'onde de de Broglie d'un proton de 1 GeV ? Si on sonde la matière avec de tels protons, est-on sensible à la structure en quarks des nucléons ?
2. La section efficace d'interaction proton-nucléon est d'environ $\sigma \approx 30$ mbarn à cette énergie. Exprimer la probabilité dP qu'un proton interagisse sur une distance dx en fonction de σ et de la masse volumique ρ du milieu qu'il traverse (on négligera la différence de masse entre le proton et le neutron).
3. En déduire le libre parcours moyen l_0 d'un proton dans de l'air de masse volumique $\rho_0 = 1,3$ kg/m^3 .

Exercice 5. Transformations de jauge

On rappelle que le hamiltonien classique d'une particule chargée de masse m et de charge q dans un champ électromagnétique qui dérive du potentiel magnétique $\vec{A}(\vec{r},t)$ et du potentiel électrique $V(\vec{r},t)$, s'écrit :

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + qV$$

1. Utiliser le principe de correspondance pour écrire l'équation de Schrödinger que vérifie la fonction d'onde $\Psi\left(\vec{r},t\right)$ de la particule dans le cas où elle est sans spin.
2. Ecrire l'équation de Schrödinger pour la particule libre (en l'absence de champ). On notera $\psi\left(\vec{r},t\right)$ la fonction d'onde de la particule libre.
3. Comment se transforme l'équation de Schrödinger de la particule libre dans un changement de phase global $\psi\left(\vec{r},t\right) \to \phi\left(\vec{r},t\right) = \psi\left(\vec{r},t\right)\exp\left(-iq\alpha/\hbar\right)$ où α est une constante réelle.

4. Comment se transforme l'équation de Schrödinger de la particule libre dans un changement de phase local $\psi(\vec{r},t) \to \chi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t)\exp\left(-iq\alpha(\vec{r},t)/\hbar\right)$ où maintenant $\alpha(\vec{r},t)$ est une fonction réelle de l'espace et du temps ?

On rappelle l'identité : $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g$.

5. Montrer que l'équation transformée s'écrit comme l'équation de Schrödinger d'une particule sans spin subissant une interaction électromagnétique dont on précisera l'expression des potentiels comme fonctions de $\alpha(\vec{r},t)$.

Exercice 6. Facteur de couleur

1. On considère la diffusion $u_r d_g \to u_r d_g$ par échange de gluons. Dessiner le graphe de Feynman correspondant le plus simple.
2. Ecrire l'expression de l'amplitude correspondante sans chercher à la calculer, en vous inspirant de l'amplitude pour la diffusion $u_r \bar{d}_g \to u_r \bar{d}_g$:

$$iM = \bar{v}_g(q) ig_s \gamma^\nu \frac{(\lambda_b)_{gg}}{2} v_g(q') \frac{-i\eta_{\nu\mu}\delta_{ab}}{k^2 + i\varepsilon} \bar{u}_r(p') ig_s \gamma^\mu \frac{(\lambda_a)_{rr}}{2} u_r(p)$$

où p, p', q, q' sont les quadriimpulsions des quarks *u* et *d* entrants et sortants et *k* la quadriimpulsion transférée. Conventionnellement la base de l'espace des couleurs est dans cet ordre $|r\rangle, |g\rangle, |b\rangle$.

3. En déduire le facteur de couleur. On rappelle que l'amplitude de la même diffusion par échange d'un photon est donnée par : $iM = \bar{v}_g(q) iQ_d \gamma^\nu v_g(q') \frac{-i\eta_{\nu\mu}}{k^2 + i\varepsilon} \bar{u}_r(p') iQ_u \gamma^\mu u_r(p)$ et conduit au potentiel coulombien : $\langle u\bar{d}|V|u\bar{d}\rangle = -\frac{Q_d Q_u}{4\pi r}$. Le facteur de couleur est défini par la substitution $Q_d Q_u \to Cg_s^2$ entre les deux amplitudes. On rappelle l'expression des matrices de Gell-Mann :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Le potentiel entre les quarks est-il attractif ou répulsif ? Commenter.
5. Qu'en est-il pour la diffusion est $u_r d_r \to u_r d_r$? Qu'en pensez-vous ?