

Introduction à la physique des particules

Exercices

Pascal Debu

*Département de physique des particules
Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives*

Année scolaire 2023-2024



ENSTA

Code du cours : PAQT12

Table des matières

1 Exercices du chapitre 1	5
a Découverte de l'électron	5
2 Exercices du chapitre 2	6
a Unités naturelles	6
b Transformation de Lorentz	6
c Électrons et photons	7
d Dilatation du temps	7
e Paradoxe des jumeaux	8
f Énergie seuil	9
g Élément d'intégration	10
h Conservation de l'énergie-impulsion	12
i Inégalités de Heisenberg	13
j Longueur d'onde de de Broglie	13
k Opérateurs moments cinétiques	14
l Addition des moments cinétiques	18
m Équation de Klein-Gordon	23
n Spin et distribution angulaire	23
o Équations de continuité	25
3 Exercices du chapitre 3	27
a Opérateur temps	27
b Opérateur impulsion	28
c Trace des matrices de Dirac	28
d Commutation avec les matrices de Dirac	29
e Covariance de l'équation de Dirac	30
f Opérateur spin sur les spineurs de Dirac	31
g Équation de Weyl	31
4 Exercices du chapitre 4	32
a Particules étranges	32
b Lois de conservation	34
c Désintégration à deux corps	35

d	Matérialisation	35
e	Distribution de Dirac	37
f	Représentation de la distribution de Dirac	38
g	Section efficace	40
h	Catastrophe au LHC	40
5	Exercices du chapitre 5	42
a	Principe de moindre action	42
b	Densité de hamiltonien	42
c	Lagrangien de dirac	43
d	Espace de Fock	44
e	Hamiltonien de Klein-Gordon	44
f	Hamiltonien de Dirac	47
g	Tenseur énergie-impulsion	48
h	Théorème de Noether	49
i	Spin des solutions de l'équation de Dirac	53
6	Exercices du chapitre 6	56
a	Force de Lorentz	56
b	Charge électrique	57
c	Invariance de jauge locale	58
d	Courant fermionique	59
e	Interaction électromagnétique des fermions	60
7	Exercices du chapitre 7	61
a	Traces et spineurs	61
b	Relations de fermeture	61
c	Propagateur	62
d	Diffusion électron muon	64
8	Exercices du chapitre 8	68
a	Moment magnétique des nucléons	68
b	Invariance de jauge du lagrangien d'interaction QCD	71
c	Facteur de couleur	72
d	Lagrangien de propagation des gluons	74
9	Exercices du chapitre 9	75
a	Renversement du temps	75
b	Symétries discrètes	76
c	Parité intrinsèque	76
d	Oscillation des neutrinos	78

10 Exercices du chapitre 10	82
a Chiralité	82
b Hélicité	82
c Violation des symétries discrètes	83
d Désintégration du pion chargé	85
e Énergie du vide	88
f Mécanisme de Brout Englert Higgs	89
g Mélange des familles ; violation de CP	97

Exercices du chapitre 1

1.a Découverte de l'électron

Thomson a mesuré la charge Q déposée par les rayons cathodiques produits pendant un certain temps à l'aide d'un électromètre, leur énergie cinétique $mv^2/2$ par l'élévation de température ΔT d'un calorimètre de capacité calorifique C , et le rayon de courbure r de leur trajectoire dans un champ magnétique B orthogonal à leur direction. Comment a-t-il obtenu le rapport e/m ?

Exercices du chapitre 2

2.a Unités naturelles

La constante de structure fine α est une constante sans dimension qui donne une mesure de l'intensité de l'interaction électromagnétique. Elle est définie par $\alpha = e^2/4\pi$ en unités naturelles. Calculer $1/\alpha$.

2.b Transformation de Lorentz

Montrer que la composition de deux transformations de Lorentz spéciales suivant le même axe est équivalente à une transformation de Lorentz de rapidité égale à la somme des rapidités des deux transformations.

2.c Électrons et photons

1. Lorsqu'on bombarde une cible avec des rayons cathodiques de quelques keV, les électrons passant à proximité des atomes sont déviés et perdent alors de l'énergie qu'ils émettent sous forme de photons dans la gamme des rayons X (rayonnement de freinage). Pour un électron accéléré sous la tension U , quelle est la longueur d'onde minimale des rayons X émis ? Application numérique : $U = 20$ kV.
2. Inversement, un photon de longueur d'onde λ_i qui frappe et éjecte un électron au repos dans la matière est dévié d'un angle θ . C'est la diffusion Compton. Exprimer la longueur d'onde λ_f du photon sortant en fonction de λ_i et de θ . Calculer $(\lambda_f - \lambda_i)$ pour $\theta = 60^\circ$. On donne la longueur d'onde de Compton $\lambda_C = h/m_e c = 0,024 \text{ \AA}$.

2.d Dilatation du temps

Le muon a une masse de $106 \text{ MeV}/c^2$ et une durée de vie τ de $2,2 \text{ } \mu\text{s}$. On considère un muon d'énergie cinétique T de 106 GeV . Quelle distance parcourt-il pendant une durée de vie ? Comparer à $c\tau$.

2.e Paradoxe des jumeaux

On considère deux jumeaux J_a et J_b initialement immobiles en $x = 0$ à $t = 0$ dans leur référentiel commun supposé galiléen. J_b décide alors de partir dans une fusée dans la direction des x positifs avec la vitesse $v_1 > 0$. À l'instant τ_R , mesuré dans son propre repère, J_b décide de repartir brusquement voir son frère et revient vers les x négatifs à la vitesse $v_2 < 0$ mesurée dans le repère de J_a .

1. À quel instant T_a , mesuré dans le repère de J_a , J_b est-il revenu ?
2. À quel instant T_b , mesuré dans son propre repère, J_b est-il revenu ?
3. Montrer que $T_a > T_b$. Commentaire ?

2.f Énergie seuil

On considère la réaction endoénergétique : $(1) + (2) \rightarrow (3) + (4)$; où (1) est la particule incidente et (2) la particule cible au repos.

1. Montrer que l'énergie cinétique minimale que doit posséder (1) pour que la réaction puisse avoir lieu s'exprime :

$$T_1 = -Q \times \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2m_2},$$

où : $Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)] c^2 < 0$.

2. Que devient cette expression à la limite non relativiste ?

2.g Élément d'intégration

1. Montrer que $d^3\vec{p}/E = dp_x dp_y dp_z / E$ est invariant par changement de repère dans le cadre de la relativité restreinte.

Indication : on montrera qu'on peut écrire $E = mc^2 \cosh \Theta$ et $p = mc^2 \sinh \Theta$, puis on considèrera une transformation de Lorentz de rapidité Ω .

2. En déduire que l'élément d'espace des phases :

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p) \frac{d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_1 (2\pi)^3 2E_2}$$

est aussi invariant.

La quantité $\delta^4(p_1 + p_2 - p)$ est le produit de quatre distributions de Dirac :

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p) = \delta(E_1 + E_2 - E) \times \delta(p_{1x} + p_{2x} - p_x) \times \delta(p_{1y} + p_{2y} - p_y) \times \delta(p_{1z} + p_{2z} - p_z).$$

Indication : utiliser la représentation de la distribution de Dirac :

$$\delta(p_x) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip_x x} dx$$

2.h Conservation de l'énergie-impulsion

1. Montrer que la masse invariante d'un système de deux particules est toujours supérieure ou égale à la somme des masses des particules.
2. Le pion neutre π^0 est une particule de masse $135 \text{ MeV}/c^2$ qui se désintègre très rapidement (durée de vie de $8,5 \times 10^{-17} \text{ s}$) en deux photons. Quelle est la masse invariante du pion neutre ? Du système de deux photons ?

2.i Inégalités de Heisenberg

Démontrer l'inégalité : $\Delta A \cdot \Delta B \geq \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| / 2$ où A et B sont des observables et $\Delta A (B)$ est l'écart quadratique moyen des résultats de la mesure de $A (B)$.

2.j Longueur d'onde de de Broglie

Calculer la longueur d'onde de de Broglie d'un électron de 1 keV, d'un électron de 1 GeV, d'un proton de 7 TeV (les énergies données sont les énergies cinétiques des particules). On utilisera la constante de conversion $\hbar c \simeq 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ pour simplifier les calculs. Dire quelle structure de la matière peut être analysée dans chacun de ces cas.

2.k Opérateurs moments cinétiques

1. Spin 1/2

Soit l'espace à 2 dimensions d'un spin 1/2, les 2 vecteurs de base étant les états $S_z = +\hbar/2$ et $-\hbar/2$.

Représenter l'opérateur S_z sous forme d'une matrice. Dire pourquoi S_x , S_y et S_z ont les mêmes valeurs propres, trace et déterminant.

2. Matrices de Pauli

On définit les matrices de Pauli : $\sigma_i = (2/\hbar)S_i$.

Utiliser les propriétés montrées en 1. pour trouver la forme générale des σ_i . Choisir σ_x réelle à coefficients positifs, en déduire σ_y en utilisant la relation $[S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k$. Calculer les vecteurs propres de S_x et S_y .

3. Propriétés des opérateurs moment cinétique

- (a) On rappelle les relations de commutation qui définissent un opérateur moment cinétique : $[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$.
 En déduire que $[J^2, J_i] = 0$.
 On pose $J^\pm = J_x \pm iJ_y$. Calculer $[J_z, J^\pm]$ et $[J^2, J^\pm]$.
 Montrer que J^- est hermitique conjugué de J^+ .
- (b) On désigne par $|a, b\rangle$ un vecteur propre normalisé commun à J^2 et J_z , dont les valeurs propres sont respectivement $\hbar^2 a$ et $\hbar b$. Les nombres a et b sont des réels, a priori inconnus. Montrer que $J^\pm |a, b\rangle$ est un vecteur proportionnel à $|a, b \pm 1\rangle$. Calculer la norme des vecteurs $J^\pm |a, b\rangle$. Que se passe-t-il si on applique J^\pm de façon répétée. En déduire des limites sur les valeurs possibles de b , et montrer alors que les valeurs possibles de a sont de la forme $j(j+1)$ où j est entier ou demi-entier. Quelles sont alors les valeurs possibles de b ?
 Remarque : les états $|a, b\rangle$ sont plutôt notés $|j, m\rangle$ où : $a = j(j+1)$ et $b = m$.
- (c) Donner les matrices représentant J^+ et J^- dans le cas $j = 1/2$ (système de spin 1/2) dans la base $(|1/2, 1/2\rangle, |1/2, -1/2\rangle)$. Retrouver les matrices de Pauli.

4. Spin 1

Calculer les matrices représentant J_i et J^2 pour le spin 1 ($j = 1$).

2.1 Addition des moments cinétiques

A) Cas général

Soit un système composé de deux sous-systèmes possédant des moments cinétiques associés aux opérateurs \widehat{J}_1 et \widehat{J}_2 agissant sur des variables indépendantes : il peut s'agir de deux particules, ou d'une seule particule avec son moment orbital et son moment intrinsèque, ou de systèmes plus complexes. On s'intéresse à l'espace de Hilbert décrivant les états des moments cinétiques. On utilise comme base de cet espace les vecteurs propres pour les opérateurs $\widehat{J}_1^2, \widehat{J}_2^2, \widehat{J}_{1z}, \widehat{J}_{2z}$. On note ces vecteurs $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ avec :

$$\begin{aligned}\widehat{J}_i^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= j_i(j_i + 1)\hbar^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \\ \widehat{J}_{iz} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= m_i\hbar |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle.\end{aligned}$$

Les modules de \widehat{J}_1 et \widehat{J}_2 sont fixés (j_1 et j_2 fixés), mais leurs orientations sont quelconques, les m_i peuvent donc prendre toutes les valeurs entre $-j_i$ et $+j_i$ par sauts de une unité. Le moment cinétique total du système est $\widehat{J} = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2$. L'objectif de l'exercice est de déterminer les caractéristiques de l'opérateur moment cinétique total.

1. Combien y a-t-il de vecteurs propres $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$?
2. Montrer que l'opérateur $\widehat{J} = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2$ est bien un opérateur moment cinétique.

On peut ainsi construire une autre base de l'espace de Hilbert précédent à partir des vecteurs propres des opérateurs \widehat{J}^2 et \widehat{J}_z . On notera les vecteurs de base $|J, M\rangle$. Ces vecteurs peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs de base précédents : $|J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{JMm_1 m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$.

Remarque : les phases des vecteurs de base peuvent être choisies de façon que tous les coefficients $C_{JMm_1 m_2}$ soient réels.

Nota bene : les coefficients $C_{JMm_1 m_2}$ dépendent de j_1 et j_2 , c'est pourquoi on devrait noter les vecteurs $|J, M\rangle$ plutôt $|j_1, j_2, J, M\rangle$, mais on préfère ici alléger l'écriture.

3. Calculer de deux façons différentes $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | \widehat{J}_z | J, M \rangle$ et en déduire que $C_{JMm_1 m_2}$ est nul si $M \neq m_1 + m_2$.
4. Montrer que $J \leq j_1 + j_2$.
5. En utilisant le produit scalaire $\langle j_1, j_2, \pm j_1, \pm j_2 | J, M \rangle$, montrer qu'on doit trouver des vecteurs $|J, M\rangle$ avec J supérieur ou égal à $|j_1 - j_2|$ et inférieur ou égal à $j_1 + j_2$. Un comptage précis du nombre d'états possibles pour chaque valeur de M montrerait que toutes les valeurs de J telles que $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ sont effectivement réalisées. On admettra ce résultat.
6. Combien y a-t-il de vecteurs $|J, M\rangle$ pour $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$.
7. En déduire que $C_{JMm_1 m_2}$ est nul si la condition

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$$

n'est pas vérifiée.

B) Cas de deux spins 1/2

On considère le système composé de deux particules de spin 1/2 . On veut exprimer les états $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2\rangle$ en fonction des états $|J, M\rangle$ possibles.

1. Montrer que $\widehat{J}^2 = \widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 + 2\widehat{J}_{1z}\widehat{J}_{2z} + \widehat{J}_1^+\widehat{J}_2^- + \widehat{J}_1^-\widehat{J}_2^+$.
2. Pour chaque état $\psi_{m_1 m_2} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2 \right\rangle$, calculer $\widehat{J}^2 \psi_{m_1 m_2}$ et $\widehat{J}_z \psi_{m_1 m_2}$. Calculer alors $\widehat{J}^2 \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \pm \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right)$

et en déduire qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{2} |1, 0\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{2} |0, 0\rangle. \end{aligned}$$

3. En déduire l'expression de tous les vecteurs $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2 \right\rangle$ en fonction des états $|J, M\rangle$ possibles.

2.m Équation de Klein-Gordon

On considère l'équation de Klein Gordon $(\square + m^2)\psi = 0$. Montrer qu'on peut écrire une équation du premier ordre en temps sur la fonction d'onde à deux composantes $\begin{pmatrix} \Phi \\ \Xi \end{pmatrix}$ en posant :

$$\Phi = \psi + \frac{i}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad ; \quad \Xi = \psi - \frac{i}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

2.n Spin et distribution angulaire

On considère une particule Λ de spin $1/2$ au repos qui se désintègre selon :

$$\Lambda \rightarrow \mathbf{p} + \pi^-.$$

Le pion est une particule de spin nul. On suppose que le Λ est dans un état propre de \widehat{S}_z (projection du spin sur l'axe Oz d'un repère centré sur la particule) : $|\Lambda, s = 1/2, s_z = \pm 1/2\rangle$. On mesure la direction de l'impulsion du proton (repérée par les angles θ et φ des coordonnées sphériques) et son hélicité $\hbar\lambda$, c'est-à-dire la projection de son spin sur sa quantité de mouvement : $\hbar\lambda = (\vec{S} \cdot \vec{p})/|\vec{p}|$. Après la mesure, le proton est donc dans l'état noté $|\theta, \varphi, \lambda\rangle$. L'amplitude de probabilité de cette observation est donnée par :

$$A_{\pm\frac{1}{2}, \lambda}(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi, \lambda | \mathbf{p}, \pi^-, j = 1/2, m = \pm 1/2 \rangle,$$

où $|\mathbf{p}, \pi^-, j = 1/2, m = \pm 1/2\rangle$ désigne l'état final proton pion dans un état propre $|1/2, m = \pm 1/2\rangle$ des opérateurs \widehat{J}^2 et \widehat{J}_z . C'est-à-dire que la probabilité de trouver le proton dans la direction (θ, φ) et l'élément d'angle solide $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ vaut $|A_{\pm\frac{1}{2}, \lambda}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de λ ?
2. Justifier que l'état final est dans un état propre du moment cinétique total de \widehat{J}^2 et \widehat{J}_z , et donner les valeurs propres.
3. En déduire : $A_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(0, 0) = \langle 0, 0, -\frac{1}{2} | \mathbf{p}, \pi^-, j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \rangle = 0$ et $A_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(0, 0) = 0$.

On pose $A^+ = A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(0, 0)$ et $A^- = A_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(0, 0)$. On cherche à obtenir $A_{m, \lambda}(\theta, \varphi)$ en fonction de ces deux quantités. L'état $|\theta, \varphi, \lambda\rangle$ du proton s'obtient à partir de l'état $|0, 0, \lambda\rangle$ par une rotation \mathcal{R}_1 de θ autour de

l'axe Oy suivie par une rotation \mathcal{R}_2 de φ autour de Oz . On rappelle que la transformation d'un spineur par une rotation d'angle α autour du vecteur unitaire \vec{u} est donnée par :

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp\left(-i\alpha\vec{u}\cdot\hat{S}/\hbar\right)\psi.$$

4. Calculer les opérateurs $\hat{\mathcal{R}}_1$ et $\hat{\mathcal{R}}_2$ correspondant à \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 .
5. En déduire $A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta, \varphi)$ et $A_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi)$ en fonction de A^+ et A^- .
6. On suppose que s_z , la projection du spin du Λ sur l'axe Oz , vaut $+1/2$. Exprimer la probabilité de trouver le proton dans la direction (θ, φ) en fonction de $\alpha = (|A^+|^2 - |A^-|^2) / (|A^+|^2 + |A^-|^2)$.

2.0 Équations de continuité

Démontrer les équations de continuité pour les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon. On rappelle que :

— pour l'équation de Schrödinger :

$$\rho = \psi^*\psi \quad \text{et} \quad \vec{j} = -\frac{i}{2m} \left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^* \right] ;$$

— pour l'équation de Klein-Gordon :

$$j^\mu = i[\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*] \quad \text{avec} \quad j^0 = \rho ; \quad j^{1,2,3} = j_{x,y,z}.$$

Exercices du chapitre 3

3.a Opérateur temps

On suppose que le temps est un opérateur, noté T , au même titre que les autres coordonnées d'espace temps.

Montrer qu'alors le commutateur $[T, E]$ doit valoir $(-i)$.

En déduire que si $|E\rangle$ est un vecteur propre du hamiltonien H pour la valeur propre E alors l'état $e^{i\varepsilon T} |E\rangle$ avec ε positif infinitésimal est un vecteur propre pour une énergie inférieure à E .

On ne peut donc pas définir d'état fondamental (d'énergie minimale).

3.b Opérateur impulsion

Montrer que l'opérateur impulsion est hermitien. Indication : le démontrer pour une composante en exprimant par exemple la quantité $\langle \psi_1 | \hat{p}_x \psi_2 \rangle$ de deux façons différentes.

3.c Trace des matrices de Dirac

Les matrices de Dirac (matrices γ) sont définies par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} ; \gamma^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{1,2,3} \\ -\sigma_{1,2,3} & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices γ sont-elles hermitiennes ?
2. Montrer que pour tout μ , la matrice $\gamma^0 \gamma^\mu$ est hermitienne.
3. Montrer que les matrices γ sont de trace nulle et de déterminant 1.

Indication : On montrera que $\det \begin{pmatrix} 0 & N \\ M & 0 \end{pmatrix} = \det(-MN)$ où M et N sont des matrices carrées d'ordre 2.

4. On définit l'anticommutateur de deux matrices A et B par $\{A, B\} = AB + BA$. Montrer que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4.

5. Montrer que $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$.
6. Montrer par récurrence que la trace du produit d'un nombre impair de matrices de Dirac est nulle.
7. On définit $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier cette égalité.
8. Montrer que $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$; $(\gamma^5)^2 = I_4$; $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.

3.d Commutation avec les matrices de Dirac

Montrer que si une matrice carrée d'ordre 4 commute avec toutes les matrices de Dirac alors elle est proportionnelle à la matrice identité I_4 .

3.e Covariance de l'équation de Dirac

Montrer que pour les transformations orthochrones (qui ne renversent pas le sens du temps : $\Lambda^0_0 > 0$) :

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0,$$

où $S = S(\Lambda)$ est l'opérateur qui transforme le spineur de Dirac lors d'une transformation de Lorentz ($\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ avec $x \rightarrow x' = \Lambda x$). On normalisera $S(\Lambda)$ en imposant $\det S(\Lambda) = 1$.

3.f Opérateur spin sur les spineurs de Dirac

On donne le hamiltonien de Dirac : $\hat{H}_D = \hat{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m \hat{I}$. Calculer le commutateur $[\hat{H}_D, \hat{\vec{L}}]$ où $\hat{\vec{L}}$ est l'opérateur $\vec{r} \times \vec{p}$.

Indication : calculer sur une composante puis faire une permutation circulaire des indices.

Montrer que $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ commute avec \hat{H}_D , où $\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ et $\vec{\sigma}$ est le vecteur dont les composantes sont les matrices de Pauli.

En prenant $\hat{\vec{S}}$ comme opérateur spin, le moment cinétique total est conservé, comme il se doit.

3.g Équation de Weyl

Montrer que pour une particule de masse nulle, on peut trouver une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans toutes les coordonnées d'espace-temps compatible avec l'équation de Klein-Gordon en introduisant un spineur à seulement deux composantes.

Exercices du chapitre 4

4.a Particules étranges

Dans le Modèle Standard, les quarks sont au nombre de six, répartis en trois familles comprenant chacune deux éléments de charge électrique $+2/3$ et $-1/3$, l'unité de charge électrique étant la charge de l'électron. On rappelle que tous les quarks ont une charge baryonique $+1/3$ et qu'on appelle méson une particule à interaction forte de charge baryonique nulle.

Peu après la découverte du méson π en 1947, de nouvelles particules instables ont été découvertes dans le rayonnement cosmique. Leur section efficace de production est élevée, mais leur durée de vie est « longue » (10^{-8} à 10^{-10} s). Elles sont donc produites par interaction forte, mais se désintègrent par interaction faible. Ces deux caractéristiques apparemment contradictoires sont à l'origine de leur appellation « particules étranges ».

On introduit alors un nouveau nombre quantique, l'étrangeté S , qui est conservé lors d'une interaction forte ou électromagnétique, mais non lors d'une interaction faible.

À la suite d'une interaction forte, les particules étranges sont toujours produites par paires, l'une ayant une étrangeté positive, l'autre une étrangeté opposée. Par convention, on attribue l'étrangeté $+1$ au méson neutre K^0 .

On observe que la particule Λ est produite dans un accélérateur avec une section efficace élevée par la réaction : $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$.

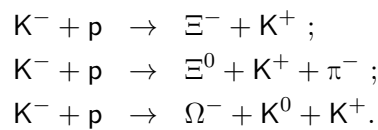
1. En déduire ses nombres quantiques (charges électrique et baryonique, étrangeté).
2. Même question pour le K^+ dans : $p + p \rightarrow p + \Lambda + K^+$.
3. L'antiparticule du K^+ est le K^- , celle du K^0 est le \bar{K}^0 . Indiquer leurs nombres quantiques.
4. Les désintégrations suivantes sont-elles possibles? Justifier.

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^- ; \Lambda \rightarrow p + \pi^- \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \gamma ; K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu. \end{aligned}$$

5. Le Λ est constitué des trois quarks u , d et s . En déduire la charge électrique du quark s et son étrangeté. Montrer que tous les mésons

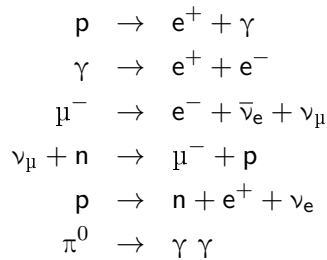
étranges K^+ , K^- , K^0 et \bar{K}^0 peuvent être formés à partir d'un quark u , d ou s et d'un antiquark.

6. Trouver tous les baryons (particules de charge baryonique +1) d'étrangeté -2 et -3 , en écrivant leur composition en trois quarks (la prédiction théorique de l'existence du Ω^- en 1963, suivie de sa découverte expérimentale l'année suivante a été le premier succès du modèle des quarks, la masse et les désintégrations de cette particule ayant été correctement déterminées à l'avance). Les identifier sachant qu'ils sont produits par les réactions suivantes :



4.b Lois de conservation

Indiquer si les désintégrations et réactions suivantes peuvent avoir lieu et la nature de l'interaction mise en jeu si c'est le cas :



4.c Désintégration à deux corps

Une particule de masse m se désintègre en deux particules de masses m_1 et m_2 . Calculer E_1 et E_2 leur énergie dans le centre de masse (éviter les calculs compliqués). Calculer $|\vec{p}_1|$ et $|\vec{p}_2|$. Utiliser les unités naturelles.

4.d Matérialisation

1. Quelle est l'énergie minimale que doit avoir un photon pour se matérialiser en une paire électron-positron ? Montrer cependant que la réaction $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ est impossible dans le vide.
2. On considère un photon se propageant dans le voisinage d'un électron au repos. Calculer l'énergie minimale du photon pour que la matérialisation puisse avoir lieu par la réaction : $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$. On pourrait dire que l'électron joue un rôle catalyseur.

Indication : se placer d'abord dans le centre de masse de la réaction pour calculer la masse invariante de l'état final, puis dans le repère du laboratoire pour calculer la masse invariante de l'état initial.

3. Le photon traverse à présent une plaque de plomb, et se trouve en présence des noyaux des atomes (notés N). Calculer l'énergie minimale du photon pour que la matérialisation puisse avoir lieu par la réaction : $\gamma + N \rightarrow N + e^+ + e^-$. Comparer avec le résultat de la première question.
4. La section efficace de la réaction précédente est donnée par la formule de Bethe et Heitler, valable pour un photon d'énergie supérieure à 500 MeV :

$$\sigma = \alpha r_0^2 Z^2 \left[\frac{28}{9} \ln \left(183 Z^{-1/3} \right) - \frac{2}{27} \right],$$

où $\alpha = 1/137$ est la constante de structure fine, $r_0 = 2,82 \text{ fm}$ est le rayon classique de l'électron, et Z le numéro atomique du noyau (82 pour le plomb).

(a) Calculer σ .

(b) Calculer la probabilité Π qu'un photon de 1 GeV se matérialise en traversant une plaque de plomb de $500 \mu\text{m}$ d'épaisseur. La masse atomique du plomb est $A = 207,2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et sa masse volumique $\rho = 11,35 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. À cette énergie, on peut négliger les autres interactions du photon dans le plomb.

4.e Distribution de Dirac

On rappelle les propriétés suivantes de la distribution de Dirac :

— Pour les fonctions f définies en x_0 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) ;$$

— Si g est une fonction telle que $g(x_i) = 0$ et $g'(x_i) \neq 0$ alors

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|},$$

et par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}.$$

Par ailleurs, deux représentations de δ seront utiles pour le cours :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) dk \quad \text{et} \quad \delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

1. Sachant que $p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2$ calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) dp^0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) dp^0,$$

et pour f à support compact :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) f(p) d^4p,$$

où θ est la fonction de Heaviside : $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

2. Calculer : $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{\sin^2(\Delta E t / 2\hbar)}{(\Delta E / 2\hbar)^2}$.

4.f Représentation de la distribution de Dirac

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'une représentation de la distribution de Dirac est donnée par :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

c'est-à-dire que pour toute fonction test $h(x)$:

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \frac{1}{2\pi} e^{ikx} dx dk.$$

1. On définit la distribution :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-k^2 \epsilon^2 / 2} dk.$$

Montrer alors que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-x^2 / (2\epsilon^2)}.$$

2. Conclure.

4.g Section efficace

La section efficace d'absorption des rayons gamma de 1 MeV par les atomes de plomb est de 10 b.

- Quelle est la longueur d'absorption λ correspondante ? Le numéro atomique du plomb est 82, son nombre de masse 207, et sa masse volumique $11 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.
- Quelle fraction f de rayons gamma traverse 10 cm de plomb ?

4.h Catastrophe au LHC

Le LHC est composé de deux anneaux circulaires de rayon R dans lesquels circulent deux faisceaux de protons en sens inverse et qui se croisent une fois par tour. Dans les deux faisceaux du LHC, les protons sont regroupés en paquets, et l'on suppose qu'il y a un seul paquet par faisceau pour simplifier. Chaque paquet est un cylindre de section S et de longueur L , dans lesquels les protons sont répartis uniformément. L'énergie cinétique nominale des protons est $T = 7 \text{ TeV}$ ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$).

1. Montrer que leur vitesse est pratiquement égale à la vitesse de la lumière c .
2. Soient N_1 et N_2 le nombre des protons dans les deux paquets. Exprimer en fonction de la section efficace de collision σ le nombre x de collisions par croisement. On admettra que ce nombre est très petit devant N_1 et N_2 .
3. On donne $\sigma = 30 \text{ mb}$. Justifier l'ordre de grandeur de cette valeur.
4. On donne $N_1 = N_2 = 10^{14}$, $R = 4,5 \text{ km}$ et $S = 0,5 \text{ mm}^2$. Calculer le nombre τ de collisions par seconde .
5. Quelle est la masse M de la particule la plus lourde qui peut être produite lors d'une collision ?
6. Quelle énergie minimale E un proton cosmique entrant en collision avec un proton au repos de l'atmosphère doit-il avoir pour produire une particule de masse M ?
7. La densité de flux de protons cosmiques d'énergie supérieure à 10^{17} eV est $\Phi = 1000$ protons par km^2 et par an. Combien d'années N le LHC devrait-il fonctionner pour égaler le nombre de collisions déjà produites par les protons cosmiques depuis que la Terre existe, soit depuis environ 4,5 milliards d'années ? On donne le rayon de la Terre : $R_T = 6400 \text{ km}$.
8. Commenter alors sur le danger potentiel de la création d'une particule dangereuse (mini trou noir par exemple) au LHC.

Exercices du chapitre 5

5.a Principe de moindre action

Un système est décrit par le lagrangien :

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

où \dot{x} désigne la dérivée dx/dt .

1. Écrire les équations de Lagrange pour ce système.
2. L ne dépend pas explicitement du temps. En déduire une quantité conservée au cours du temps.

5.b Densité de hamiltonien

On considère la densité de lagrangien $\mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu=0,1,2,3} \psi)$ ne dépendant pas explicitement du temps. On définit la densité de hamiltonien par :

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L}, \text{ où } \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)}.$$

Montrer que la quantité $H = \int \mathcal{H} d^3x$ est une constante du mouvement. On précisera les hypothèses sur ψ et ses dérivées qui permettent de montrer ce résultat.

Indication : utiliser le principe de moindre action généralisé pour calculer $d\mathcal{L}/dt$ et isoler les termes d'indice 0 pour faire apparaître une divergence.

5.c Lagrangien de dirac

Montrer que la densité de lagrangien :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi^\dagger) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

conduit à l'équation de Dirac par le principe de moindre action généralisé.

5.d Espace de Fock

On définit les états notés $|N\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle$ comme les états à n_1 particules d'impulsion \vec{p}_1 , n_2 particules d'impulsion $\vec{p}_2 \dots$, complètement symétriques par échange de deux particules. Montrer que :

$$\langle N|M\rangle \neq 0 \Rightarrow N = M.$$

Indication : utiliser l'hermiticité de l'opérateur $a_{\vec{p}_i}^\dagger a_{\vec{p}_i}$.

5.e Hamiltonien de Klein-Gordon

La densité de lagrangien de Klein-Gordon est donné par :

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2.$$

On rappelle que les solutions de l'équation de K-G sont :

$$\psi = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left(a_{\vec{p}} \exp(-ipx) + a_{\vec{p}}^\dagger \exp(ipx) \right)$$

avec :

$$x = (t, \vec{x}) \quad ; \quad p = (E, \vec{p}) \quad ; \quad E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

1. Exprimer la densité de hamiltonien \mathcal{H} en fonction de ψ et de ses dérivées.
2. Exprimer le hamiltonien $H = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}$ en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.
3. Calculer :

$$H|0\rangle \quad ; \quad H a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle.$$

5.f Hamiltonien de Dirac

La densité de hamiltonien de Dirac est donnée par : $\mathcal{H} = i\psi^\dagger \partial_0 \psi$, et les solutions de l'équation de Dirac par :

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[\sum_{i=1}^2 \left(b_{\vec{p},i} u_{\vec{p},i} \exp(-ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i}^\dagger v_{\vec{p},i} \exp(ip_\mu x^\mu) \right) \right].$$

Exprimer le hamiltonien $H = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}$ en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.

5.g Tenseur énergie-impulsion

Cet exercice est une généralisation de l'exercice 5.b. Soit un lagrangien $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$. On considère la variation $\delta\mathcal{L}$ sous une translation d'espace-temps, soit par la transformation $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu$, où ε_μ est infinitésimal.

1. Montrer que :

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon_\mu \partial^\mu \mathcal{L} = \varepsilon_\nu \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \partial^\nu \psi \right].$$

2. En déduire que le tenseur énergie-impulsion défini par :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

vérifie : $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

3. En déduire que la quantité :

$$p_\nu = \int d^3 \vec{x} T_{0\nu}$$

est conservée dans le temps.

5.h Théorème de Noether

On considère une densité de lagrangien $\mathcal{L}(\dots, \psi_i, \partial_\mu \psi_i, \dots)$ dépendant de N champs ψ_i . On considère par ailleurs un groupe de transformations du système dépendant d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ (groupe de Lie) :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = g(x^\mu, \alpha) ; \psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x') = G_i(\psi_j(x), \alpha).$$

On dit que le groupe est un groupe de symétrie du système si pour tout domaine d'intégration Ω , l'action reste invariante sous l'action d'un élément du groupe :

$$\int_{\Omega} d^4 x \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\mu \psi_i) = \int_{\Omega'} d^4 x' \mathcal{L}(\psi'_i, \partial'_\mu \psi'_i).$$

On choisit la paramétrisation des transformations de sorte que pour $\alpha = 0$ la transformation soit l'identité, et l'on considère une transformation infinitésimale. On écrit au premier ordre :

$$x'^\mu = x^\mu - \alpha f^\mu(x) ; \psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x') = \psi_i(x) + \alpha C_i(x).$$

Dans toute la suite, on se limitera au premier ordre en α .

1. Calculer $\partial_\nu x'^\mu$ et $\partial'_\mu x^\nu$.

2. Calculer $\partial'_\mu (\psi_i' (x'))$.
3. Montrer que le jacobien de la transformation $x \rightarrow x'$ vaut :

$$J = 1 - \alpha \partial_\mu f^\mu (x).$$

4. En déduire que la variation de l'action s'écrit :

$$S' - S = \alpha \int_\Omega d^4x \partial_\mu \Theta^\mu,$$

avec

$$\Theta^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} [C_i(x) + \partial_\nu \psi_i(x) f^\nu(x)] - f^\mu(x) \mathcal{L}.$$

5. En déduire une quantité conservée au cours du temps, en supposant que les champs s'annulent à l'infini.
6. Application 1 : opérateur quantité de mouvement.
Le lagrangien de Dirac est invariant par translation. En déduire l'opérateur quantité de mouvement.
7. Application 2 : moment cinétique.
Le lagrangien de Dirac est invariant par rotation. On considère une rotation infinitésimale d'angle θ autour de l'axe 3 (Oz).

- (a) Exprimer les transformations

$$x \rightarrow x', \psi \rightarrow \psi' \text{ et } \psi^\dagger \rightarrow \psi'^\dagger$$

au premier ordre en θ .

On rappelle que pour une transformation de Lorentz propre orthochrone $\Lambda : \psi' (x') = S(\Lambda) \psi(x)$ où $S(\Lambda) = I_4 - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$, pour $\omega_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ infinitésimal et $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

On posera : $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$.

- (b) En déduire l'expression de la composante z du moment cinétique total.

5.i Spin des solutions de l'équation de Dirac

On donne l'expression de l'opérateur projection du spin sur l'axe des z choisi parallèle à \vec{p} :

$$S_z = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \psi^\dagger \Sigma_3 \psi.$$

Calculer $S_z |0\rangle$ puis $S_z b_{\vec{p},i} |0\rangle$ et $S_z d_{\vec{p},i}^\dagger |0\rangle$ pour chaque valeur de $i = 1, 2$.

Exercices du chapitre 6

6.a Force de Lorentz

Montrer que la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}$$

découle du principe de moindre action appliqué au lagrangien :

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + q\vec{v} \cdot \vec{A} - qV,$$

où \vec{A} est le potentiel vecteur : $\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial\vec{A}/\partial t \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases}$.

Déterminer le hamiltonien associé.

6.b Charge électrique

On considère le champ d'opérateurs non hermitique :

$$\psi = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left(a_{\vec{p}} \exp(-ipx) + c_{\vec{p}}^\dagger \exp(ipx) \right)$$

avec : $x = (t, \vec{x})$; $p = (E, \vec{p})$; $E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

On définit la densité de charge :

$$j^0 = -iq \left((\partial^0 \psi^\dagger) \psi - (\partial^0 \psi) \psi^\dagger \right).$$

Calculer la charge Q définie par $Q = \int j^0 d^3x$.

6.c Invariance de jauge locale

On définit la densité de lagrangien suivante :

$$\mathcal{L} \left(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi^\dagger \right) = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi = \mathcal{L}_{KG}(\psi_1) + \mathcal{L}_{KG}(\psi_2),$$

où ψ_1 et ψ_2 sont deux opérateurs hermitiques indépendants tels que $\psi = (\psi_1 + i\psi_2) / \sqrt{2}$, et donc $\psi^\dagger = (\psi_1 - i\psi_2) / \sqrt{2}$.

Montrer que \mathcal{L} est invariant par le changement de phase $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-ie\theta(x)}$ si l'on remplace ∂_μ par $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ et si lors du changement de phase $A_\mu \rightarrow A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu\theta$.

6.d Courant fermionique

1. Montrer que la densité de lagrangien $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ conduit à l'équation de Dirac par le principe de moindre action.
2. Montrer que \mathcal{L} est invariant par changement de phase global sur ψ :

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(-ie\theta)\psi.$$

3. Quel est le courant conservé ?

6.e Interaction électromagnétique des fermions

1. Montrer que la densité de lagrangien $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ est invariante par la transformation de jauge locale $\psi \rightarrow \psi' = \exp(-iq\theta)\psi$, où θ est une fonction des coordonnées d'espace-temps, si l'on remplace ∂_μ par $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ et si la transformation de jauge sur A_μ est donnée par $A_\mu \rightarrow A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu\theta$.
2. Quel est le terme d'interaction électromagnétique ?

Exercices du chapitre 7

7.a Traces et spineurs

Montrer la relation :

$$u_{\vec{p},i}^\dagger \gamma^0 v_{\vec{q},j} v_{\vec{q},j}^\dagger \gamma^0 u_{\vec{p},i} = \text{Tr} \left(v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} u_{\vec{p},i} \overline{u_{\vec{p},i}} \right).$$

Indication : exprimer le membre de gauche explicitement avec les indices des composantes des différentes quantités.

7.b Relations de fermeture

Montrer les relations :

$$\sum_{i=1}^2 u_{\vec{p},i} \overline{u_{\vec{p},i}} = (\not{p} + m)$$

et

$$\sum_{j=1}^2 v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} = (\not{q} - m).$$

7.c Propagateur

Le propagateur d'un boson de spin 0 et de masse m est défini par :

$$D_F(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} (\theta(t) \exp[-ip_\mu x^\mu] + \theta(-t) \exp[ip_\mu x^\mu]).$$

Montrer que la transformée de Fourier $f(p)$ de $D_F(x)$ définie par :

$$D_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(p) \exp[-ip_\mu x^\mu]$$

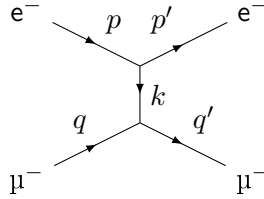
vaut :

$$f(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

où ε est une quantité positive infiniment petite (nécessaire pour définir la valeur de l'intégrale par application du théorème des résidus).

7.d Diffusion électron muon

On considère la diffusion $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$. La quadri-impulsion de l'électron entrant est p , celle du muon q et la quadri-impulsion transférée est $k = p - p'$, où p' est la quadri-impulsion de l'électron diffusé.



On suppose l'état initial (noté i) non polarisé et on ne mesure pas la direction des spins des particules sortantes dans leur état final (noté f).

On rappelle que la section efficace différentielle de diffusion est donnée par :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 \vec{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{1}{\sqrt{(p \cdot q)^2 - m_e m_\mu}} |M_{fi}|^2.$$

1. On note m l'état de spin du muon entrant, l celui du muon sortant, i celui de l'électron entrant et j celui de l'électron sortant. On note $M(m, l, i, j)$ l'élément de matrice de diffusion correspondant. Montrer que la section efficace différentielle mesurée est donnée par

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 \vec{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{1}{4\sqrt{(p \cdot q)^2 - m_e m_\mu}} \overline{|M|^2}$$

où on exprimera $\overline{|M|^2}$ en fonction des $M(m, l, i, j)$.

2. Montrer que :

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{k^4} \times [(q \cdot p) (q' \cdot p') + (q \cdot p') (q' \cdot p) - m_\mu^2 (p \cdot p') - m_e^2 (q \cdot q') + 2m_\mu^2 m_e^2].$$

3. Dans l'approximation ultra-relativiste (toutes les impulsions très grandes devant les masses, montrer que :

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{k^4} (q \cdot p q' \cdot p' + q \cdot p' q' \cdot p) = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2),$$

où on a défini les variables de Mandelstam :

— $s = (q + p)^2 = (q' + p')^2 \simeq 2q \cdot p \simeq 2q' \cdot p'$ carré de l'énergie dans le centre de masse ;

— $t = (p - p')^2 = (q' - q)^2 = k^2$ carré de la quadri-impulsion transférée ;

— $u = (p - q')^2 = (p' - q)^2 \simeq -2p \cdot q' \simeq -2p' \cdot q$;

— $s + t + u =$ somme des carrés des masses des particules entrantes et sortantes.

4. On démontrera aussi la dernière relation, qui prouve qu'il n'y a en fait que deux variables indépendantes.

Exercices du chapitre 8

8.a Moment magnétique des nucléons

1. Fonction d'onde de couleur des baryons.

Le baryon Δ^{++} est constitué de trois quarks u et possède un spin $3/2$. Sa masse est $1,23 \text{ GeV}/c^2$, proche de celle des nucléons. Les quarks sont donc dans l'état d'énergie minimale et la fonction d'onde spatiale $\psi_s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ correspond à un moment cinétique orbitale nul. Elle est alors symétrique par l'échange de deux quarks.

Montrer que la fonction d'onde de spin est aussi symétrique par échange de deux quarks.

Indication : exprimer l'état $|s = 3/2, m_s = 3/2\rangle$ en fonction des états de spin $1/2$ des 3 quarks et utiliser l'opérateur $S^- = S_1^- + S_2^- + S_3^-$ pour calculer les autres états. On rappelle que de façon générale :

$$J^- |j, m\rangle = \begin{cases} \hbar\sqrt{(j(j+1) - m(m-1))} |j, m-1\rangle & \text{pour } m > -j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction d'onde globale devant être antisymétrique d'après le principe de Pauli, ce fut historiquement un argument pour introduire un nombre quantique supplémentaire, la couleur, pour pouvoir rendre la fonction d'onde du Δ^{++} antisymétrique. Avec trois couleurs, pour un quark on a :

$$|\psi_c\rangle = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} = \psi_r |r\rangle + \psi_g |g\rangle + \psi_b |b\rangle.$$

La fonction d'onde de couleur totalement antisymétrique pour trois quarks s'obtient simplement avec le déterminant :

$$\psi_c = \begin{vmatrix} \psi_{r1} & \psi_{r2} & \psi_{r3} \\ \psi_{g1} & \psi_{g2} & \psi_{g3} \\ \psi_{b1} & \psi_{b2} & \psi_{b3} \end{vmatrix} / \sqrt{6}.$$

Les interactions fortes étant indépendantes de la saveur des quarks, la fonction d'onde de couleur est la même pour tous les baryons, et elle est antisymétrique.

2. Fonction d'onde de spin des nucléons.

Pourquoi la fonction d'onde de spin des nucléons est-elle symétrique ? En déduire son expression, sachant que le proton et le neutron ont un spin 1/2.

Indication : exprimer la fonction d'onde du proton comme la combinaison linéaire d'une fonction d'onde ψ_1 avec les spins des quarks u antiparallèles et d'une fonction d'onde ψ_2 avec les spins parallèles, $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$, imposer que le spin global soit 1/2 par $S^+\psi = 0$, et normaliser ψ . Pour le neutron, inverser les rôles des quarks u et d.

3. Moment magnétique des nucléons.

On rappelle que le moment magnétique d'un fermion élémentaire s'exprime : $\vec{\mu} = \frac{q}{m}\vec{S}$.

Montrer que le moment magnétique du proton vaut : $\mu_p = (4\mu_u - \mu_d)/3$. Calculer le rapport du moment magnétique du proton au moment magnétique du neutron μ_p/μ_n , en supposant que les quarks u et d ont la même masse m .

Application numérique : calculer μ_p/μ_0 , et μ_n/μ_0 où μ_0 est le magnéton nucléaire : $\mu_0 = e\hbar/2M_p$, où M_p est la masse du proton.

On donne : $M_p = 938 \text{ MeV}/c^2$; $m = 333 \text{ MeV}/c^2$. Les valeurs mesurées sont respectivement 2,79 et -1,91. On utilisera la fonction d'onde du proton calculée précédemment et l'expression :

$$\mu_p = \langle \psi_p(m_s = +1/2) | \hat{\mu}_z | \psi_p(m_s = +1/2) \rangle.$$

où l'axe z est l'axe sur lequel on mesure le spin.

8.b Invariance de jauge du lagrangien d'interaction QCD

Vérifier que le lagrangien d'interaction QCD :

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\gamma^\mu D_\mu - m) q = \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q - g_s \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q G_\mu^a$$

est invariant sous la transformation de jauge infinitésimale définie par (attention à la sommation sur les indices répétés, les notations sont parfois ambiguës) :

$$q \rightarrow q' = \left(1 - \frac{i}{2} g_s d\alpha^a \lambda_a \right) q$$

$$G_\mu^a \rightarrow G'^a_\mu = G_\mu^a + g_s d\alpha^b f_{abc} G_\mu^c + \partial_\mu d\alpha^a.$$

8.c Facteur de couleur

On veut montrer que si le méson π^+ (qui est un état lié $u\bar{d}$) est dans un état singlet de couleur, c'est-à-dire invariant par transformation $SU(3)$, alors le potentiel QCD est attractif.

La fonction d'onde du π^+ s'écrit : $\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_r \bar{d}_r + u_g \bar{d}_g + u_b \bar{d}_b)$ que l'on note pour alléger l'écriture :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}).$$

1. Montrer que ψ est invariant par la transformation :

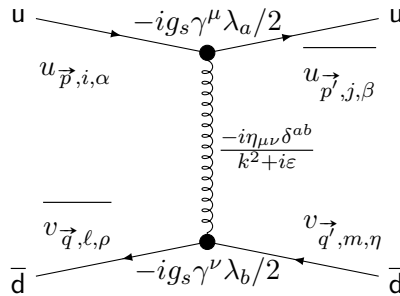
$$(r, g, b)^\top \rightarrow (r', g', b')^\top = U(r, g, b)^\top$$

où l'opérateur U est un élément de $SU(3)$.

2. En utilisant les règles de Feynman indiquées sur la figure ci-dessous et les expressions des matrices de Gell-Mann données dans le cours, montrer que le facteur de couleur de la diffusion :

$$u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}$$

vaut $4/3$.



Indication :

On calculera le facteur de diffusion pour une paire couleur anticouleur fixée dans l'état initial vers chaque paire possible de l'état final et l'on obtiendra le facteur de couleur en exprimant l'amplitude de diffusion sous la forme :

$$\langle \bar{\psi} | \mathbf{S} | \psi \rangle = \frac{1}{3} \left(\sum_{c=r,g,b} \langle c\bar{c} | \mathbf{S} | c\bar{c} \rangle + \sum_{c_1, c_2=r,g,b}^{c_1 \neq c_2} \langle c_1 \bar{c}_1 | \mathbf{S} | c_2 \bar{c}_2 \rangle \right).$$

3. En utilisant l'amplitude de diffusion QED similaire, dire pourquoi le potentiel est attractif.

8.d Lagrangien de propagation des gluons

Montrer que la densité de lagrangien QCD : $-\frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu}^a\mathcal{G}^{a\mu\nu}$ n'est pas invariante de jauge locale si l'on définit : $\mathcal{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a$.

Indication : On calculera la variation de $\mathcal{G}_{\mu\nu}^a$ sous une transformation de jauge locale donnée par :

$$\begin{cases} q \rightarrow q' = U(x)q & \text{avec } U(x) = \exp \left[-ig_s \sum_{a=1}^8 \alpha^a(x)\lambda_a/2 \right] \\ G_\mu^a \rightarrow G_\mu^{\prime a} = G_\mu^a + g_s \alpha^b(x) f_{abc} G_\mu^c + \partial_\mu \alpha^a(x). \end{cases}$$

Exercices du chapitre 9

9.a Renversement du temps

1. Montrer que si on transforme la fonction d'onde des spineurs de Dirac selon la règle : $\psi'(-t, \vec{x}) = T[\psi(t, \vec{x})] = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \vec{x})$, on obtient une fonction d'onde vérifiant une équation de Dirac avec les coordonnées transformées par l'opérateur T .
2. Montrer que $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ se transforme comme :

$$T(j^0, \vec{j})^\top = (j^0, -\vec{j})^\top.$$

9.b Symétries discrètes

Montrer que l'équation de Dirac est invariante par les transformations de parité, de conjugaison de charge et de renversement du temps.

9.c Parité intrinsèque

Le π^0 est un méson de spin nul. Il se désintègre par interaction électromagnétique en deux photons. On se place dans le référentiel du π^0 .

1. Montrer que les deux photons ont la même hélicité.

On admet que le photon n'a que deux hélicités possibles (+1 et -1). Les états d'hélicités possibles normalisés des deux photons sont notés $|1, 1\rangle$ et $|-1, -1\rangle$.

2. Montrer que l'opérateur parité P échange ces deux états d'hélicité.

Le π^0 est état propre de P . On cherche à déterminer la valeur propre associée à cet état propre. On la nomme parité intrinsèque du π^0 .

3. Dédurre de la question 2 les deux états finals possibles normalisés pour les deux photons sous forme d'une combinaison linéaire des états $|1, 1\rangle$ et $|-1, -1\rangle$.

On note $|+\rangle$ (resp. $|-\rangle$) l'état correspondant à la valeur propre +1 (resp. -1). Les états d'hélicité définie d'un photon correspondent aux états polarisés

circulairement. On peut aussi polariser les photons linéairement suivant les axes x et y perpendiculaires à leur direction de propagation. On note $|x\rangle$ et $|y\rangle$ les états polarisés suivant x et y respectivement. Ils sont obtenus par addition et soustraction des états polarisés circulairement.

On a, avec des facteurs de phase conventionnels : $|x\rangle = (|-1\rangle - |+1\rangle)/\sqrt{2}$.
De même : $|y\rangle = i(|-1\rangle + |+1\rangle)/\sqrt{2}$.

4. Montrer les relations :

$$\begin{cases} |+\rangle = (|x, x\rangle - |y, y\rangle)/\sqrt{2} \\ |-\rangle = i(|x, y\rangle + |y, x\rangle)/\sqrt{2}. \end{cases}$$

5. On mesure la polarisation linéaire des deux photons et on trouve qu'ils ont des polarisations linéaires différentes. En déduire la parité intrinsèque du π^0 .

9.d Oscillation des neutrinos

Dans cet exercice, sauf mention contraire, on utilise les unités naturelles. On suppose de plus que les neutrinos sont de masse nulle ou très petite (inférieure à quelques eV/c^2).

A. Désintégration du pion chargé.

Soit la désintégration d'un pion chargé au repos : $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.

1. Calculer l'énergie E_1 du neutrino émis en fonction des masses m_π et m_μ du pion et du muon. Pour cette question, on négligera la masse du neutrino.

A.N. : On donne : $m_\pi = 139,6 \text{ MeV}/c^2$, et $m_\mu = 105,7 \text{ MeV}/c^2$.

B. Propagation des neutrinos dans le vide.

On suppose que le neutrino est émis dans la direction x et on supposera qu'il se propage dans le vide sous la forme d'une onde plane $\psi(t, x) = \exp[i(E_1 t - p_1 x)] |\nu_1\rangle$, où $|\nu_1\rangle$ est la fonction d'onde initiale du neutrino de masse m_1 (on sait que c'est plutôt un paquet d'ondes qui décrit cette propagation, mais la description en onde plane suffit pour le phénomène étudié ici).

En fait, lors de la désintégration du pion, le neutrino émis est un ν_μ , une superposition des états propres de masse m_1 , m_2 et m_3 : $|\nu_\mu\rangle = \alpha |\nu_1\rangle + \beta |\nu_2\rangle + \gamma |\nu_3\rangle$.

Les masses des neutrinos ont pour origine leur interaction avec le champ de Higgs et d'autres effets quantiques, et il n'y a aucune raison pour que l'état produit par interaction faible soit un état propre de masse.

On suppose que l'on peut négliger la contribution d'un des trois états propres, et on écrit : $|\nu_\mu\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle + \sin\theta |\nu_2\rangle$. On appelle θ

l'angle de mélange. Compte tenu de la méthode de détection, on fait l'hypothèse que les deux neutrinos ν_1 et ν_2 ont la même énergie.

On notera m_2 la masse du ν_2 .

2. Écrire la fonction d'onde décrivant l'évolution du ν_μ dans le vide en fonction de $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, x, t$, de l'angle de mélange, des énergies et des masses.
3. Sachant que $\langle \nu_2 | \nu_1 \rangle = 0$, en déduire la probabilité P de mesurer le neutrino dans l'état ν_μ à la distance L de sa création. On ne mesure pas la quantité de mouvement des neutrinos et on peut supposer que les deux neutrinos (les paquets d'onde) se propagent à la vitesse de la lumière ($L = t$). On se limitera à un développement limité à l'ordre 2 sur la masse des neutrinos. On exprimera P en fonction de L, E (énergie des neutrinos), $\sin^2(2\theta)$ et Δm^2 , où $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$. On mettra P sous la forme :

$$P = 1 - f(\theta) \times g(m_1, m_2, L, E),$$

où $E = E_1 = E_2$ et f et g sont des fonctions réelles. Cette formule justifie le nom d'oscillations donné à l'observation de ce phénomène de disparition apparente des neutrinos produits.

4. Rétablir les constantes \hbar et c dans la relation donnant P .
5. On exprime la masse des neutrinos en eV/c^2 , leur énergie en GeV, et les distances en km. Écrire P en fonction de $\sin^2(2\theta)$ et de $\sin^2(K \times \Delta m^2 L/E)$, où K est une constante numérique que l'on calculera.
6. A.N. : calculer P avec $\theta = 45^\circ$, $\Delta m^2 = 3 \times 10^{-3} (\text{eV}/c^2)^2$ et $E = 1 \text{ GeV}$ pour $L = 15 \text{ km}$ et $L = 13000 \text{ km}$.

C. Anomalie des neutrinos atmosphériques

Les rayons cosmiques qui pénètrent dans l'atmosphère (d'épaisseur inférieure à 15 km) produisent des gerbes de particules, et notamment des pions chargés qui se désintègrent eux-mêmes et créent ainsi des ν_μ . Ces neutrinos ont une énergie typique de 1 GeV. Un détecteur à la surface de la Terre détectera une petite fraction de ces neutrinos. La section efficace d'absorption des neutrinos par les nucléons dans la matière est $\sigma \approx 10^{-42} \text{ m}^2$ à cette énergie.

7. Quel est le pourcentage des neutrinos en provenance de $\theta = 180^\circ$ absorbés par la Terre (θ est l'angle zénithal, angle entre la direction d'où vient le neutrino et la verticale montante)? On rappelle que la Terre a un rayon d'environ 6400 km. On prendra une masse volumique moyenne pour la Terre de $5,5 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$.
8. Le rapport des flux mesurés $\text{flux}(\theta = 180^\circ)/\text{flux}(\theta = 0^\circ)$ de ν_μ après correction d'angle solide est d'environ 60 %. C'est ce qui a

été appelé l'anomalie des neutrinos atmosphériques. Dans le cadre du modèle de la partie 2 de cet exercice, peut-on en conclure que les neutrinos ont une masse ?

C'est une des mesures qui a été récompensée par le prix Nobel de physique 2015.

Exercices du chapitre 10

10.a Chiralité

Démontrer que pour un spineur de Dirac à quatre composantes \mathbf{u} :

$$m \bar{\mathbf{u}} \mathbf{u} = m (\bar{\mathbf{u}}_R \mathbf{u}_L + \bar{\mathbf{u}}_L \mathbf{u}_R).$$

On précisera soigneusement la signification des notations.

10.b Hélicité

On définit l'hélicité comme la projection du spin sur l'impulsion de la particule :

$$\hat{h} = \frac{\hat{\mathbf{S}} \cdot \vec{p}}{\|\vec{p}\|} \text{ où on rappelle : } \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Les composantes de \vec{p} en coordonnées sphériques sont $(\|\vec{p}\|, \theta, \varphi)$.

1. Exprimer \hat{h} en fonction de θ et φ .
2. En déduire que le spineur ψ défini ci-dessous est vecteur propre de \hat{h} :

$$\psi = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \exp(i\varphi) \sin(\theta/2) \\ \frac{\|\vec{p}\|}{E+m} \cos(\theta/2) \\ \frac{\|\vec{p}\|}{E+m} \exp(i\varphi) \sin(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

10.c Violation des symétries discrètes

1. Montrer que le terme d'interaction $\mathcal{L}_{W12} = W_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu \mathbf{L}_L + W_\mu^- \bar{\mathbf{L}}_L \gamma^\mu \nu_L$ n'est pas invariant par transformation P ou C , mais l'est par la transformation produit CP .
2. Montrer que \mathcal{L}_{W12} est invariant par renversement du temps. On prendra garde que l'opérateur T est antiunitaire.

10.d Désintégration du pion chargé

On considère le pion chargé π^+ ou π^- .

1. Quelle est sa parité intrinsèque ?
2. Quelle est l'interaction responsable de sa désintégration ?
3. Dessiner le diagramme de Feynman le plus simple correspondant.
4. On donne le facteur au vertex de l'interaction fermion-boson W :

$$-i \frac{g_W}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} C$$

où C est une constante qui vaut 1 pour les leptons et qui dépend de la paire quark-antiquarks. En déduire l'amplitude de la désintégration à l'ordre le plus bas des perturbations.

5. On se place dans le référentiel du centre de masse du pion. On admettra que, dans l'expression de l'amplitude, la partie concernant les quarks se réduit à un terme de la forme $f_\pi p_\mu$, où f_π est une constante et p_μ le quadrivecteur énergie impulsion du pion, soit $f_\pi m_\pi$ dans le référentiel du centre de masse. Pouvez-vous justifier ?
6. Le propagateur du W se réduit à $i\eta^{\mu\nu}/M_W^2$. Justifier.
On donne $M_W = 80,4 \text{ GeV}/c^2$.
7. On néglige la masse des neutrinos. Donner l'expression du spineur de l'antineutrino ν , pour chaque valeur possible de son hélicité. On définit l'axe z suivant l'impulsion de l'antineutrino $\vec{p} = p_z \vec{e}_z$ avec $p_z > 0$
8. Montrer que seule une hélicité contribue à cause du facteur $(1 - \gamma^5)$.
9. En déduire l'expression de l'amplitude.
10. En déduire le rapport des taux de désintégration $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ et $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Comparer à la valeur expérimentale $1,23 \times 10^{-4}$.
On donne $M_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ et $M_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$.

10.e Énergie du vide

Dans les années 1990, l'accélération de l'expansion de l'Univers a été découverte en comparant le décalage vers le rouge des supernovæ et leur distance de luminosité. Une interprétation dans le cadre du modèle de concordance de la cosmologie est l'existence d'une énergie noire emplissant l'Univers.

1. On pourrait imaginer estimer la densité de cette énergie noire à partir du potentiel de Higgs. Avec les valeurs données dans le cours, calculer la densité d'énergie potentielle de Higgs au minimum (donc dans le vide).

Les mesures donnent : $0,35 \times 10^{-5} \text{ GeV}/\text{cm}^3$. Comparer.

On exprimera les densités en GeV^4 .

Une autre hypothèse serait la contribution des énergies de point 0 des champs de particules, avec une contribution de :

$$\rho = \pm \int d^3 \vec{p} \frac{p^0}{2}$$

par composante, le signe dépendant de la nature bosonique ou fermionique du champ.

2. Calculer l'ordre de grandeur de cette densité en supposant que l'intégrale doit être bornée à l'énergie de Planck ($pc < \Lambda \sim 10^{19}$ GeV), énergie à laquelle on s'attend à ce que la quantification s'applique à la gravitation. Comparer avec la valeur expérimentale.

10.f Mécanisme de Brout Englert Higgs

Le but de ce problème est d'étudier le mécanisme de Brout Englert Higgs. On considère un cas simple où il permet de donner une masse à un lepton chargé et aux bosons vecteurs de l'interaction faible.

On ne se place pas dans le cadre de la seconde quantification, et on considèrera les différents champs de particules comme des fonctions réelles ou complexes des coordonnées d'espace-temps x . Ainsi, le champ de Dirac d'un lepton et de son antilepton associé est un bi-spinneur de fonctions complexes. Un boson scalaire neutre est représenté par une fonction réelle.

Doublet lepton neutrino associé

On considère un champ de Dirac $\psi(x)$ obéissant à la densité de Lagrangien :

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi.$$

1. Montrer que le terme de masse peut s'écrire :

$$-m (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R),$$

où ψ_R et ψ_L sont les états chiraux définis par :

$$\psi_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \psi \text{ et } \psi_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi.$$

On considère un lepton chargé décrit par le champ $\psi(x)$ et son neutrino associé décrit par $\nu(x)$. On définit le doublet D formé par les états chiraux gauches des champs précédents :

$$D = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \psi_L \end{pmatrix}.$$

On impose à D d'être un doublet d'isospin faible. Autrement dit, sous une transformation quelconque \mathcal{T} de $SU(2)_L$ (l'indice L rappelle simplement que

les transformations s'appliquent seulement aux états chiraux gauches), D est transformé en D' avec :

$$D' = \mathcal{T} D.$$

Comme $SU(2)$ est engendré par les matrices de Pauli (avec conventionnellement un facteur $1/2$), on peut toujours écrire :

$$\mathcal{T} = \exp \left[-ig_W \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right], \quad (10.1)$$

où g_W est la constante de couplage faible, $\vec{\alpha}$ est un vecteur à trois composantes réelles qui définit la transformation et $\vec{\sigma}$ est le vecteur formé par les matrices de Pauli.

On impose aux états chiraux droits ν_R et ψ_R d'être des singlets d'isospin, c'est-à-dire invariants par transformation de $SU(2)_L$.

2. Montrer que le terme de masse n'est pas invariant par les transformations du groupe de jauge $SU(2)_L$.

Doublet de Higgs

On introduit un doublet $\Phi(x)$ de champs scalaires complexes $\phi_a(x)$ et $\phi_b(x)$:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{pmatrix}$$

qui se transforme comme un doublet d'isospin par transformation de $SU(2)_L$:

$$\Phi' = \exp \left[-ig_W \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right] \Phi.$$

On introduit dans la densité de lagrangien un terme d'interaction entre ce doublet et les leptons :

$$\mathcal{L}_I = -g_D (\bar{D}\Phi\psi_R + hc),$$

où g_D est une constante de couplage réelle positive, $\bar{D} = (\bar{\nu}_L, \bar{\psi}_L)$ et hc désigne le terme hermitique conjugué du premier terme de la parenthèse.

3. Exprimer hc .

4. \mathcal{L}_I est-il invariant pour le groupe de jauge $SU(2)_L$?

On rappelle que l'hypercharge de D vaut -1 , celle de ψ_R -2 , celle de ν_R 0 . Autrement dit, si Y est défini comme l'opérateur hypercharge :

$$YD = -D \quad Y\psi_R = -2\psi_R \quad Y\nu_R = 0.$$

On considère la transformation de $U(1)_Y$ définie par :

$$\exp \left[-i\beta \frac{Y}{2} \right],$$

où β est un réel quelconque.

5. Quelle doit être l'hypercharge y de Φ ($Y\Phi = y\Phi$) pour que \mathcal{L}_I soit invariant par toute transformation du groupe de jauge $U(1)_Y$?

On se donne la densité de lagrangien de Φ :

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi - V(\Phi), \quad (10.2)$$

où :

$$V(\Phi) = -\rho \Phi^\dagger\Phi + \lambda (\Phi^\dagger\Phi)^2,$$

où ρ et λ sont deux nombres réels strictement positifs.

On définit un état fondamental (« vide ») comme un état pour lequel V est minimal et toutes les dérivées de Φ sont nulles. On peut montrer que l'énergie totale est alors minimale.

6. \mathcal{L}_H est-il invariant par multiplication de Φ par une phase ($\Phi \rightarrow \Phi' = \exp[i\phi] \Phi$) ?
7. Donner la condition sur $\Phi^\dagger\Phi$ pour être dans un état fondamental. Cet état est-il dégénéré ?

Masse du lepton chargé

8. Soit v une constante réelle positive. À quelle condition sur v le doublet

$$\Phi(x) = \text{constante} = H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

est-il dans un état fondamental ?

9. On revient à un doublet $\Phi(x)$ quelconque. Montrer qu'on peut trouver une matrice $M(x)$ 2×2 , unitaire et de déterminant 1 telle que :

$$M(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \Phi(x),$$

où $h(x)$ est une fonction réelle des coordonnées d'espace-temps x .

10. En déduire, sans calculs compliqués, qu'on peut toujours exprimer Φ sous la forme :

$$\Phi(x) = \exp \left[i\vec{\theta}(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right] \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

où $\vec{\theta}(x)$ représente un vecteur de trois fonctions réelles des coordonnées d'espace-temps x .

En déduire qu'il existe une jauge du groupe $SU(2)_L$ dans laquelle :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

où $h(x)$ est un champ scalaire réel.

11. Calculer \mathcal{L}_I dans cette jauge, en considérant que cette jauge est celle choisie initialement dans ce problème pour exprimer les champs leptoniques.
12. Montrer en utilisant la question 1 qu'un terme de masse apparaît pour le lepton représenté par ψ . Donner sa masse en fonction de g_D et v .

Masse des bosons de jauge et du boson de Higgs

Soit la densité de lagrangien :

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu, \quad (10.3)$$

où les fonctions $A_{\mu=0,1,2,3}$ et leurs dérivées partielles $\partial_{\nu=0,1,2,3}A_\mu$ sont considérées comme des variables indépendantes et $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

13. Calculer $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu}$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu A^\mu)}$.
14. En utilisant les équations de Lagrange généralisées, montrer qu'on obtient les équations de propagation :

$$\square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu + M^2 A_\mu = 0.$$

C'est la propagation d'un boson vecteur représenté par le champ vectoriel A_μ et de masse M . On admettra que la normalisation des densités de lagrangien rencontrées dans les questions suivantes imposeront une expression similaire pour les différents bosons de jauge lorsqu'ils sont massifs, avec bien sûr une valeur de M éventuellement différente. On admettra aussi que le terme de masse dans la densité de lagrangien pour un champ vectoriel complexe s'écrit de façon semblable : $\frac{1}{2}M^2 A_\mu^\dagger A^\mu$.

On rappelle que dans la densité de Lagrangien \mathcal{L}_H (équation 10.2) la dérivée covariante s'exprime par :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_W \sum_{a=1}^{a=3} \frac{\sigma_a}{2} W_\mu^a + ig \frac{Y}{2} B_\mu,$$

où les σ_a sont les matrices de Pauli, g est la constante de couplage associée au groupe de jauge $U(1)_Y$, et W_μ^a et B sont des champs vectoriels introduits pour assurer l'invariance de jauge locale.

15. On se trouve toujours dans la jauge où :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'un terme de masse (de la forme rencontrée dans l'équation 10.3) apparaît pour les bosons représentés par les champs Z_μ^0 et W_μ^\pm définis par :

$$\begin{aligned} Z_\mu^0 &= \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \\ W_\mu^\pm &= \frac{W_\mu^1 \mp i W_\mu^2}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

où :

$$\cos^2 \theta_W = \frac{g_W^2}{g_W^2 + g^2} \text{ et } \sin^2 \theta_W = \frac{g^2}{g_W^2 + g^2}.$$

Indication : On évitera de calculer tous les termes du lagrangien, on pourra se limiter aux termes de la forme recherchée. On utilisera la relation :

$$W_\mu^- W^{\mu+} = \frac{1}{2} \left(W_\mu^{+\dagger} W^{\mu+} + W_\mu^{-\dagger} W^{\mu-} \right)$$

Exprimer ces masses en fonction de v et des constantes de couplage g_W et g . W_μ^- et W_μ^+ sont les champs représentant les bosons W^- et W^+ . Z_μ représente le boson Z^0 .

16. Montrer que le champ scalaire $h(x)$ acquiert aussi une masse qu'on exprimera en fonction de ρ . Pour la définition du terme de masse, on utilisera le terme de masse de la densité de lagrangien de Klein-Gordon, qui décrit un champ scalaire réel libre. Le champ $h(x)$ représente le boson de Higgs.
17. Les masses mesurées des bosons W et Z sont :

$$M_W = 80,4 \text{ GeV}/c^2 \text{ et } M_Z = 91,2 \text{ GeV}/c^2.$$

En déduire la valeur de $\cos \theta_W$, puis celle de v en GeV sachant que $e = g \cos \theta_W$, où e est la constante de couplage électromagnétique. On prendra garde que les relations utilisées jusqu'ici étaient en unités naturelles.

Indication : on pourra utiliser la relation $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$ pour obtenir une relation entre les différents **dimensions** des constantes fondamentales.

Remarque : ces valeurs sont approchées car elles ne tiennent pas compte de la renormalisation qui modifie un peu les relations entre les paramètres du modèle standard.

10.g Mélange des familles ; violation de CP

Le but de ce problème est de montrer que le mécanisme de Brout Englert Higgs qui donne la masse des bosons vecteurs permet aussi de donner une

masse à tous les leptons et induit un mélange des familles de quarks et de leptons, qui permet à l'interaction faible de violer la symétrie CP , comme observé expérimentalement.

On ne se place pas dans le cadre de la seconde quantification, et on considèrera les différents champs de particules comme des fonctions réelles ou complexes des coordonnées d'espace-temps x . Ainsi, le champ de Dirac d'un lepton et de son antilepton associé est un bi-spineur de fonctions complexes. Un boson scalaire neutre est représenté par une fonction réelle.

Masse des leptons chargés

On considère un lepton chargé décrit par le champ $\psi(x)$ et son neutrino associé décrit par $\nu(x)$. On définit le doublet D formé par les états chiraux gauches des champs précédents :

$$D = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \psi_L \end{pmatrix}, \text{ avec } \nu_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\nu \text{ et } \psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi.$$

On impose à D d'être un doublet d'isospin faible. Autrement dit, sous une transformation quelconque \mathcal{T} de $SU(2)_L$ (l'indice L rappelle simplement que les transformations s'appliquent seulement aux états chiraux gauches), D est transformé en D' avec :

$$D' = \mathcal{T} D.$$

Comme $SU(2)$ est engendré par les matrices de Pauli (avec conventionnellement un facteur $1/2$), on peut toujours écrire :

$$\mathcal{T} = \exp \left[-ig_W \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right], \quad (10.4)$$

où g_W est la constante de couplage faible, $\vec{\alpha}$ est un « vecteur » à trois composantes réelles qui définit la transformation et $\vec{\sigma}$ est le « vecteur » formé par les matrices de Pauli.

On impose aux états chiraux droits ν_R et ψ_R d'être des singlets d'isospin, c'est-à-dire invariants par transformation de $SU(2)_L$.

On introduit un doublet $\Phi(x)$ de champs scalaires complexes $\phi_a(x)$ et $\phi_b(x)$:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{pmatrix}$$

qui se transforme comme un doublet d'isospin par transformation de $SU(2)_L$:

$$\Phi' = \exp \left[-ig_W \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right] \Phi.$$

On peut montrer (exercice 10.f) qu'on peut trouver une matrice $M(x)$ 2×2 inversible, unitaire et de déterminant 1 telle que :

$$M(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \Phi(x),$$

où v est une constante réelle et $h(x)$ une fonction réelle des coordonnées d'espace-temps x (champ scalaire). Comme $SU(2)$ est engendré par les matrices de Pauli, on peut toujours exprimer Φ sous la forme :

$$\Phi(x) = \exp \left[i\vec{\theta}(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right] \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

où $\vec{\theta}(x)$ représente un « vecteur » de trois fonctions réelles des coordonnées d'espace-temps x .

1. En déduire qu'il existe une jauge du groupe $SU(2)_L$ dans laquelle :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

On suppose qu'on se trouve dans cette jauge particulière. La quantité v est choisie égale au module que doit prendre $\Phi(x)$ pour minimiser son énergie potentielle (valeur du champ de Higgs dans le vide).

2. Montrer que le terme d'interaction :

$$\mathcal{L}_I = -g_D (\bar{D}\Phi\psi_R + hc),$$

où hc désigne le hermitique conjugué du premier terme dans la parenthèse est invariant par transformation de jauge de $SU(2)_L$.

3. Montrer qu'en ajoutant ce terme à la densité de lagrangien libre des champs de Dirac $\psi(x)$ et $\nu(x)$:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi + \bar{\nu}i\gamma^\mu D_\mu\nu$$

on donne une masse au lepton chargé représentée par ψ , et exprimer cette masse en fonction de g_D et v .

Masse des neutrinos

On voudrait à présent donner aussi une masse au neutrino, tout en préservant encore l'invariance de jauge du lagrangien.

On définit le champ $\Phi^c = i\sigma^2\Phi^*$, où σ^2 est la matrice de Pauli :

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que l'hypercharge de D vaut -1 , celle de ψ_R -2 , celle de ν_R 0 , celle de Φ $+1$. Autrement dit, si Y est défini comme l'opérateur hypercharge :

$$YD = -D \quad Y\psi_R = -2\psi_R \quad Y\nu_R = 0 \quad Y\Phi = \Phi.$$

Toute transformation de $U(1)_Y$ s'écrit :

$$\exp \left[-i\beta \frac{Y}{2} \right],$$

où β est un réel quelconque.

4. Quelle est l'hypercharge de Φ^c ?
5. Montrer que le terme d'interaction :

$$\mathcal{L}_I^c = -g_D^c (\bar{D}\Phi^c \nu_R + hc)$$

est invariant par transformation de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

6. En déduire qu'en se plaçant dans la jauge où :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

on fait apparaître un terme de masse pour le neutrino. On exprimera cette masse en fonction de v et g_D^c .

Mélange des leptons

On introduit un terme d'interaction de la forme :

$$\mathcal{L}_{jk} = -g_{jk} \bar{D}_j \Phi \psi_{kR} - g_{jk}^c \bar{D}_j \Phi^c n_{kR} + hc,$$

où j et k sont des entiers compris entre 1 et 3 qui désignent le numéro de famille des leptons, g_{jk} et g_{jk}^c sont des constantes réelles, et n_k désigne le champ du neutrino de la famille k :

- $\psi_{1,2,3}$ sont les champs décrivant respectivement l'électron, le muon et le tau ;
- $n_{1,2,3}$ sont les champs décrivant les neutrinos électron, muon et tau.

7. Montrer que \mathcal{L}_{jk} est invariant par transformation de jauge de $SU(2)_L \times U(1)_Y$.
8. On pose :

$$\mathcal{L}_{tot} = \sum_{j,k=1}^3 \mathcal{L}_{jk}.$$

On se place dans la jauge où :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Écrire \mathcal{L}_{tot} sous la forme :

$$\mathcal{L}_{tot} = -\overline{\Psi}_L M \Psi_R - \overline{N}_L M^c N_R - \frac{1}{v} \overline{\Psi}_L M \Psi_R h - \frac{1}{v} \overline{N}_L M^c N_R h + hc,$$

où :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix},$$

et M et M^c sont des matrices 3×3 dont on exprimera les éléments en fonction de v et des g_{jk} et g_{jk}^c .

9. Ce lagrangien permet de donner une masse aux trois leptons chargés représentés par Ψ . Donner les valeurs des éléments de matrice M_{jk} pour ce faire. On donne :

$$m_e = 0,511 \text{ MeV} ; m_\mu = 106 \text{ MeV} ; m_\tau = 1777 \text{ MeV}.$$

Historiquement, et par définition, N représente les trois neutrinos produits par interaction faible avec leurs (anti)leptons chargés associés. Expérimentalement, le phénomène d'oscillation des neutrinos peut s'expliquer naturellement si on admet que les n_i sont des combinaisons linéaires de trois champs $\nu_{1,2,3}$ de masses définies $m_{1,2,3}$:

$$N = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

où U est une matrice unitaire 3×3 . En mécanique quantique, les champs sont définis à une phase près. De ce fait, plusieurs des phases complexes des éléments de la matrice U peuvent être absorbées par un ajustement des phases des n_i et des ν_i .

10. (*Difficile.*) Pouvez-vous alors justifier qualitativement qu'on peut exprimer U à l'aide de 4 paramètres réels qui ont une signification physique, 3 angles dits de mélange et une phase complexe δ ? Indication : on rappelle qu'une rotation dans l'espace est définie par trois angles.

On pose $V_{PMNS} = U^\dagger = U^{-1}$ (matrice de Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata).

11. Quelle condition relie V_{PMNS} et M^c pour donner les masses $m_{1,2,3}$ aux neutrinos représentés par $\nu_{1,2,3}$?

Mélange des quarks

Historiquement, les quarks ont été définis comme les composants de très nombreux hadrons produits par interaction forte, et leur masse a été déduite des propriétés de ces derniers. De façon tout à fait similaire aux leptons, le

mécanisme de Higgs permet de leur donner la masse adéquate par des termes d'interaction avec le boson de Higgs et son conjugué de charge, invariants de jauge. Ils s'expriment, dans la jauge adéquate :

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}} = -\overline{D_L}M_D D_R - \overline{U_L}M_U U_R - \frac{1}{v}\overline{D_L}M_D D_R h - \frac{1}{v}\overline{U_L}M_U U_R h + hc,$$

où :

$$U = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix},$$

u, c, t, d, s, b désignent les champs décrivant les quarks éponymes, et les matrices M_U et M_D sont diagonales et représentent les masses des quarks des différentes générations, respectivement d'isospin $+1/2$ et $-1/2$.

Compte tenu de l'indépendance des couplages avec le boson Higgs et avec les bosons vecteurs faibles, il n'y a aucune raison que les processus d'interaction faible par courant chargé s'écrivent simplement :

$$\mathcal{L}_{W_{cc}} = \frac{g_W}{\sqrt{2}} [\overline{U_L}\gamma^\mu D_L W_\mu^+ + \overline{D_L}\gamma^\mu U_L W_\mu^-].$$

12. Montrer en effet qu'on peut multiplier U et D par des matrices unitaires quelconques sans violer l'invariance de jauge.

De ce fait, le terme d'interaction faible par courant chargé s'écrit plutôt :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W_{cc}} &= \frac{g_W}{\sqrt{2}} [\overline{U_L}\gamma^\mu V_{CKM} D_L W_\mu^+ + \overline{D_L}\gamma^\mu V_{CKM}^\dagger U_L W_\mu^-] \\ &= \frac{g_W}{\sqrt{2}} [\overline{U_L}\gamma^\mu V_{CKM} D_L W_\mu^+ + hc], \end{aligned}$$

où V_{CKM} est la matrice de mélange des quarks (matrice de Cabibbo, Kobayashi, Maskawa), matrice unitaire 3×3 , dépendant de quatre paramètres physiques, trois angles et une phase, comme la matrice de mélange des leptons.

13. Montrer que les deux termes de la somme entre parenthèses sont bien conjugués hermitiques l'un de l'autre comme énoncé.

Violation de CP

14. Montrer que $\mathcal{L}_{W_{cc}}$ viole la symétrie CP si V_{CKM} n'est pas réelle.

La violation de CP a été découverte en 1964 dans les désintégrations des mésons K neutres. Les physiciens japonais Kobayashi et Maskawa ont reçu le prix Nobel de physique 2008 pour avoir introduit en 1974 la matrice de mélange de trois familles de quarks pour expliquer ce phénomène, alors que seuls les quarks u, d et s avaient alors été découverts.