Exercice 1 : *Coefficient de viscosité de l'argon*

Calculer une estimation de la valeur du coefficient de viscosité de l'argon à la température de 300 K en utilisant l'expression microscopique de ce coefficient démontrée en cours. On estimera la section efficace de collision des atomes à partir de la densité de l'argon solide, égale à 1.65 g/cm^3 et de la masse atomique de l'argon, égale à 40 g.mol^{-1}. Comparer cette valeur approchée avec la valeur expérimentale de la viscosité de l'argon : $\eta = 2.1\times10^{-4}\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ à une pression de 1013 millibar et une température de 0 °C.

Exercice 2 : *Équation maîtresse pour le système uniforme*

On considère un système isolé qui possède N états et dont les probabilités de transition par unité de temps entre états sont toutes égales : $\forall(i,j)\in[1,N]\times[1,N];i\neq j\Rightarrow a_{ij}=a$.
Écrire et résoudre l'équation maîtresse, montrer que toute distribution initiale de probabilité converge vers la distribution micro canonique.

Exercice 3 : *Diffusion comme une marche au hasard*

On considère le mouvement à une dimension d'une particule dont le déplacement s'effectue par des sauts au hasard à intervalle de temps fixe τ, et toujours avec le même pas Δ, avec une probabilité égale que le pas soit dirigé vers la droite ou vers la gauche (0.5 dans chaque cas). On suppose que les pas sont statistiquement indépendants. On note $P(n,s)$ la probabilité que la particule soit au point de coordonnée $n\Delta$ à l'instant $s\tau$ si elle se trouvait à l'origine au temps t = 0.

1. Exprimer $P(n,s)$ en fonction des probabilités à l'instant précédent $P(m,s-1)$.
2. On suppose que Δ et τ tendent tous deux vers 0, le rapport $\Delta^2/2\tau$ tendant vers une constante D non nulle. Exprimer $P(n,s)-P(n,s-1)$ en fonction de $\tau\times\partial w(x,t)/\partial t$ et $P(n+1,s-1)-P(n,s-1)$ en fonction de $\partial w/\partial x$, où $w(x,t)$ est la densité de probabilité pour que la particule se trouve entre les positions $x=(n-1/2)\Delta$ et $x+dx=(n+1/2)\Delta$ à l'instant $t=(s-1)\tau$.
3. Montrer, en utilisant la relation obtenue en 1 décrivant l'évolution de $P(n,s)$, que la densité de probabilité $w(x,t)$ vérifie l'équation, dite de "diffusion" : $\partial w/\partial t = D\partial^2 w/\partial x^2$
4. En déduire les équations d'évolution de la position moyenne $\langle x(t)\rangle$ en fonction du temps ainsi que de l'écart quadratique moyen $\langle x^2(t)\rangle-\langle x(t)\rangle^2$ de la position.
   Indication : calculer d'abord les dérivées par rapport au temps de ces quantités.
5. Montrer que la distribution gaussienne : $w(x,t)=\left(1/\sqrt{4\pi Dt}\right)\exp\left(-x^2/4Dt\right)$ satisfait l'équation de diffusion.

Exercice 4 : *Jacobien de l'évolution d'un volume élémentaire de l'espace des phases*

Montrer que le Jacobien de la transformation infinitésimale (de t à $t+dt$) de déformation du volume d'espace des phases d^3rd^3v pour une particule (espace à six dimensions) au cours de son évolution dynamique sous l'action d'un champ de force $\vec{F}$ ne dépendant pas de la vitesse est égal à 1 à des termes d'ordre 2 au moins en *dt*. En déduire qu'en l'absence de collisions, un volume d'espace conserve son volume dans son évolution dynamique.

Exercice 5 : *Modèle simple de conduction ionique*

Un gaz est faiblement ionisé, et les collisions des ions se produisent principalement avec des molécules neutres du gaz. Un ion de masse *m* et de charge *e* a une probabilité dt/τ de subir une collision entre les instants t et $t+dt$. On néglige les collisions entre les ions eux-mêmes. On suppose que les ions sont soumis à un champ électrique constant, dirigé suivant l'axe x et de module *E*.

1. Exprimer la probabilité $P(t)$ pour qu'un ion n'ait pas subi de choc entre l'instant initial ($t=0$) et l'instant t, et montrer que τ est le temps moyen entre deux collisions.
2. Quelle est la distance moyenne $\bar{x}$ parcourue par un ion entre deux collisions si on fait l'hypothèse que l'ion redémarre avec une vitesse nulle après chaque collision ?
3. Dans quelle fraction des cas la longueur du trajet est-elle inférieure à $\bar{x}$?
4. On veut savoir comment le champ électrique modifie la distribution de vitesses si on suppose maintenant que chaque choc ramène l'ion non pas à une vitesse nulle mais à une distribution de Maxwell-Boltzmann. Montrer que l'on peut exprimer la distribution des vitesses $f(\vec{r},\vec{v},t)$ comme une intégrale :
$$f(\vec{r},\vec{v},t)=\int_0^\infty f^{(0)}(\vec{r}_0,\vec{v}_0,t-t')\exp\left(-t'/\tau\right)\frac{dt'}{\tau} \quad (1)$$
où $f^{(0)}(\vec{r}_0,\vec{v}_0,t-t')=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-mv_0^2/2kT\right)$ est la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann immédiatement après un choc et $\exp\left(-t'/\tau\right)dt'/\tau$ est la probabilité que le dernier choc se soit produit entre *t'* et $t'+dt'$ avant le temps *t* considéré. Exprimer $\vec{r}_0$ et $\vec{v}_0$ en fonction de $\vec{r}$ et $\vec{v}$.
5. En réalisant une intégration par parties de (1), donner une expression approchée de :
$$\Delta f \equiv f(\vec{r},\vec{v},t)-f^{(0)}(\vec{r}_0,\vec{v}_0,t)$$
On supposera que le supplément de vitesse dû au champ électrique entre deux chocs est faible devant la vitesse quadratique moyenne des ions à l'équilibre en l'absence de champ électrique et que τ est indépendant de la vitesse *v* et du champ électrique *E*.
6. En déduire une expression de la conductivité ionique $\sigma=\frac{j_x}{E}=\frac{e\int d^3v\, f\, v_x}{E}$ (rapport entre le courant ionique et le champ électrique *E* suivant cette même direction *x*).