Exercice 1 : *Anneau de Kac*

2. La relation entre $B(t)$ et $B(t+1)$ s'exprime en notant que le nombre de sites noirs au temps $(t+1)$, $B(t+1)$, est égal au nombre de sites qui étaient déjà noirs au temps t, diminué du nombre de ceux qui étaient noirs et qui vont devenir blancs par passage devant un marqueur au coup d'horloge suivant, soit $b(t)$, et augmenté du nombre de ceux qui étaient blancs et qui vont devenir noirs par passage devant un marqueur au coup d'horloge suivant, soit $w(t)$. La relation demandée est donc : $B(t+1) = B(t) - b(t) + w(t)$.
En échangeant $B(t)$ et $W(t)$, on a la deuxième relation : $W(t+1) = W(t) - w(t) + b(t)$.

3. Soit un état quelconque par lequel le système est passé. On calcule l'évolution du système à partir de cet état. Comme par hypothèse le système comporte un nombre fini d'états, il y aura nécessairement un moment où le système repasse par un de ses états antérieurs. L'ensemble des états compris entre ces deux états identiques constitue un cycle. Comme le système a par hypothèse une évolution réversible, si on inverse l'évolution dynamique, on décrit en sens inverse le cycle en question, et en utilisant à nouveau le fait que l'évolution dynamique du système est réversible, on repasse forcément par l'état que l'on avait utilisé comme état initial.
Donc, cet état initial fait partie du cycle et le système repasse donc périodiquement et un nombre infini de fois par cet état (en fait, tout état par lequel il est passé).

Ce théorème constitue un cas particulier du théorème de récurrence de Poincaré, qui stipule qu'un système dynamique réversible dont l'espace des phases est compact repasse nécessairement aussi près que l'on veut de son état initial, et cela un nombre infini de fois.

4. Le passage devant un marqueur inverse l'état du site dans un système à deux états, opération réversible si on change le sens de défilement. Le fonctionnement dynamique de l'anneau de Kac est donc réversible. Le système étant à nombre fini d'états, le théorème de récurrence précédent s'applique donc.

5. On a vu dans la question précédente que, l'anneau de Kac étant à nombre fini d'états et à dynamique réversible, il devait nécessairement être périodique. Mais l'anneau de Kac a une récurrence particulièrement courte, liée à sa dynamique. En effet, si m est le nombre de marqueurs, il est facile de voir qu'après un tour complet, c'est-à-dire après N unités de temps (où on rappelle que N est le nombre de sites de l'anneau) chaque site aura défilé devant l'ensemble des m marqueurs, et exactement ce nombre. Donc tout site aura subi exactement m interversions de son état. Si m est pair, l'état après un tour sera le même que l'état initial.
Si m est impair, l'état sera exactement inversé, et donc un deuxième tour aura pour conséquence que tout site aura défilé devant $2m$ marqueurs, et sera donc dans son état initial.
Donc pour un état initial quelconque des sites de l'anneau, le temps de récurrence est N si le nombre m de marqueurs est pair, et $2N$ si le nombre de marqueurs est impair.

6. La question précédente a montré qu'un anneau de Kac a un temps de récurrence qui est au maximum de $2N$ unités de temps. Le nombre total de configurations possibles pour un système de N sites est 2^N. Donc sauf pour le cas trivial où $N=1$ ou $N=2$, l'anneau de Kac n'est pas un système ergodique, et ne passe qu'à travers une fraction très faible, si N est grand, de l'ensemble de ses états possibles.

7. Si l'hypothèse de décorrélation précédente est vérifiée, on a l'équation :

$$B(t+1) = B(t) - b(t) + w(t) = B(t) - \mu\left[B(t) - W(t)\right]$$

De même:

$$W(t+1) = W(t) - w(t) + b(t) = W(t) - \mu\left[W(t) - B(t)\right]$$

En soustrayant l'une à l'autre ces deux équations, on obtient :

$$B(t+1) - W(t+1) = \left[B(t) - W(t)\right]\left(1-2\mu\right)$$

Donc, si l'on excepte les deux cas triviaux où $\mu = 0$ et $\mu = 1$, correspondant aux cas où, soit il n'y aucun marqueur, soit tous les sites se situent avant un marqueur, la ``couleur'' diminue exponentiellement en fonction du temps selon: $\delta(t) = \left(1-2\mu\right)^t \delta(0)$, en oscillant si $\mu > 1/2$, sans oscillation si $\mu < 1/2$. Noter que si $\mu = 1/2$, la formule semble indiquer que la ``couleur'' devient grise ($\delta = 0$) dès le premier pas de temps.

Ce comportement exponentiellement décroissant, qui semble valable quel que soit l'état initial, donc irréversible, semble en complète opposition avec à la fois la réversibilité du système et le fait qu'il soit récurrent, qui plus est avec une période très faible, au plus égale à $2N$, comme on l'a vu plus haut. Pour comprendre en quel sens, et sur quel domaine temporel, il est possible de démontrer une telle décroissance exponentielle de la ``couleur'', il est nécessaire de préciser le type de moyenne envisagée.

8.a) S'il y avait un marqueur entre les sites (i) et $(i+1)$, la valeur du site $(i+1)$ est l'inverse de celle du site (i), sinon elle est restée inchangée, et c'est bien ce qu'exprime la relation demandée.

8.b) Montrons que : $\delta(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\chi_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_{i-1}\chi_{i-1}(t-1) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{t} m_{i-j}\chi_{i-t}(0)$

La première égalité correspond à la définition de $\delta(t)$ exprimé comme $(B(t) - W(t))/N$.

La deuxième égalité correspond à la formule que l'on vient de démontrer, et la troisième égalité correspond à l'itération de cette même formule pour chaque site jusqu'à ce que l'on revienne au temps 0.

8.c) Montrons l'égalité $\delta(2N) = \delta(0)$. Pour démontrer cette relation, il suffit de noter que pour $t = 2N$, chaque marqueur intervient deux fois dans le produit. Donc, quelle que soit sa valeur, $+1$ ou -1, le produit sera nécessairement égal à 1, d'où l'égalité.

8.d) Montrons que la moyenne sur l'ensemble des configurations des marqueurs peut s'écrire :

$$\left\langle \delta(t) \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\langle \prod_{j=1}^{t} m_{i-j} \right\rangle \chi_{i-t}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\langle \prod_{k=1}^{t} m_{k} \right\rangle \chi_{i-t}(0) = \left\langle \prod_{k=1}^{t} m_{k} \right\rangle \delta(0)$$

Avec la formule 8.b), du fait que l'on s'est ramené à la configuration des sites à l'instant $t=0$, la moyenne sur les marqueurs peut par hypothèse être décorrélée de la valeur des sites, ce qui est le sens de la première égalité. Noter que cette hypothèse de décorrélation n'est plus vérifiée dès que les sites ont défilé devant un ou plusieurs marqueurs : il est donc essentiel de se ramener à la configuration des sites à $t=0$. La deuxième égalité se déduit de la première par invariance de la moyenne des marqueurs sous translation globale des indices. La troisième égalité s'obtient en mettant en facteur la somme des $\chi_{i-t}(0)$ qui est la définition de $\delta(0)$.

8.e) Montrons la relation : $\left\langle \prod_{k=1}^{t} m_{k} \right\rangle = \left[(1-\mu)\times 1 + (\mu)\times(-1)\right]^t = (1-2\mu)^t$

- On se donne μ. Parler de probabilité μ qu'un marqueur se trouve entre deux sites consécutifs suppose que les marqueurs sont distribués de façon décorrélée et aléatoire. On peut se douter du fait que lorsque le nombre m de marqueurs devient de l'ordre de N, cette hypothèse de décorrélation n'est plus valable. Mais dans l'hypothèse où chaque « intersite » est indépendant des autres et possède une probabilité μ d'avoir un marqueur, la valeur moyenne pour l'un quelconque d'entre eux est : $(1-\mu)\times 1 + (\mu)\times(-1)$, ce qui fournit la formule demandée (valeur précédente élevée à la puissance t du nombre de marqueurs). Clairement, cette formule n'est valable que lorsque le temps est inférieur à N. Pour des temps supérieurs, il faut enlever au nombre des marqueurs tous ceux qui apparaissent en double et n'ont donc globalement pas d'effet.

- Si $m = \mu\times N$, on peut toujours calculer la valeur du produit de t marqueurs $\left(\prod_{k=1}^{t} m_k\right)_j$ en fonction de *j*, si *j* est le nombre des marqueurs effectivement rencontrés: dans tous les cas, ce produit vaut très simplement $(-1)^j$. Supposons à présent $t<N$. Dans ce cas, le nombre total de marqueurs étant fixé à m, le nombre de marqueurs sur t sites de marqueurs consécutifs répond *approximativement* à une loi binomiale (probabilité d'avoir *j* succès sur *t* essais si la probabilité d'un succès vaut μ) : $p_j(t) = C_t^j \mu^j (1-\mu)^{(t-j)}$. Si on utilise cette loi, en incorporant le facteur $(-1)^j$ dans le terme μ^j, on obtient :

$$\left\langle \prod_{k=1}^{t} m_{k} \right\rangle = \sum_{j=0}^{t} p_j(t)\left(\prod_{k=1}^{t} m_k\right)_j = \sum_{j=0}^{t} C_t^j (-1)^j \mu^j (1-\mu)^{(t-j)} = C_t^j(-\mu)^j (1-\mu)^{(t-j)} = (1-2\mu)^t$$

C'est bien le résultat demandé, mais il n'est pas exact car la formule devient fausse quand le temps t se rapproche trop de N. Par exemple, si $t = N-1$, le nombre de marqueurs ne peut être égal qu'à m ou à $m-1$, alors que la formule binomiale ci-dessus donne des probabilités non nulles pour les autres termes $p_j(t)$ dès que $j<t$. La formule ci-dessus ne constitue donc une bonne approximation que si on se situe à une distance raisonnable de $t=N$ par valeurs

inférieures. En pratique, pour $t < N/2$, quand N est grand, on n'aura certainement aucun problème de corrélation induit par le nombre total de marqueurs.

9.a) Dans le cas où $t > N$, il y a nécessairement une partie des marqueurs qui apparaissent deux fois, et dont la contribution disparaît car le terme correspondant vaut 1. Pour $N < t < 2N$, il y a en fait $2N - t$ marqueurs apparaissant une fois, et ce nombre décroît donc (comportement anti-Boltzmann) lorsque t augmente entre N et $2N$. Pour $t = 2N$, on a vu que tous les marqueurs apparaissaient deux fois et que la couleur était donc inchangée.

9.b) Si on fixe le nombre de marqueurs, quand $t = N$ le produit des marqueurs vaut une valeur fixe, égale à $(-1)^{N\mu}$. Donc la couleur est soit inchangée, soit changée de signe par rapport à sa valeur initiale, c'est-à-dire extrêmement corrélée à la valeur initiale.

10. Un contre-exemple très simple : si on groupe les marqueurs par deux, après deux pas de temps, on se retrouve dans la configuration initiale, quelle que soit celle-ci.