Corrigé exercice 1

Magnéton de Bohr : $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e} = 9.3\times10^{-24}\ \mathrm{Am}^2$, d'où $E \sim \dfrac{\mu_0\mu_B^2}{4\pi r^3} \sim 10^{-23}\ \mathrm{J}$ pour une distance interatomique de l'ordre de 0.1 nm.
$T \sim E/k \sim 1\,\mathrm{K}$: on voit donc que le ferromagnétisme qui est observé à des températures ordinaires n'est pas dû aux interactions entre dipôles magnétiques : il s'agit en fait d'un phénomène quantique dû au caractère antisymétrique de la fonction d'onde décrivant un système de fermions qui fait apparaître un terme $\vec{S}_i.\vec{S}_j$ dans le hamiltonien.

Corrigé exercice 2 : *Réseau cubique centré*

1. Deux micro-états : comme J_1 et J_2 sont positifs, l'énergie est minimale lorsque tous les spins sont alignés, tous +1 ou tous -1. À température nulle, le système est dans l'un de ces deux états. En effet, à température nulle l'énergie libre, qui est minimum à l'équilibre, est égale à l'énergie interne.
2. $Z_1 = 8$ et $Z_2 = 6$.
3. Dans l'approximation du champ moyen, on considère qu'un spin est soumis à l'aimantation moyenne du réseau. On a alors :
$H = -Z_1J_1\bar{\sigma}\sum_{\mathrm{i}}\sigma_i - Z_2J_2\bar{\sigma}\sum_{\mathrm{i}}\sigma_i = -\left(Z_1J_1 + Z_2J_2\right)\bar{\sigma}\sum_{\mathrm{i}}\sigma_i$ soit $C = \left(Z_1J_1 + Z_2J_2\right)\bar{\sigma}$
4. Dans cette approximation, tout se passe comme si les spins étaient indépendants, le hamiltonien est la somme des hamiltoniens pour chaque site, la fonction de partition est donc $Z = z_i^N$ où z_i est la fonction de partition d'un spin :
$z_i = \exp\left(-C/kT\right) + \exp\left(C/kt\right) = 2\cosh\left(C/kt\right)$
Noter que les spins étant attachés à un site du réseau, ils sont discernables, et il n'y a pas de facteur $1/N!$.
5. La valeur moyenne de σ_i s'obtient à partir de sa fonction de partition z_i :
$\langle\sigma_i\rangle = \left(+1\times\exp\left(C/kT\right) - 1\times\exp\left(-C/kT\right)\right)/z_i = \tanh\left(C/kT\right)$
Comme $\langle\sigma_i\rangle = \bar{\sigma}$ par définition, on obtient la relation d'auto cohérence :
$\bar{\sigma} = \tanh\left(\left(Z_1J_1 + Z_2J_2\right)\bar{\sigma}/kT\right)$
6. Comme $\tanh x < x$ pour tout x strictement positif, la relation d'auto cohérence n'a de solution non nulle que si la température est inférieure à la température critique donnée par : $T_c = \left(Z_1J_1 + Z_2J_2\right)/k$

Corrigé exercice 3

Avec le changement de variable, le hamiltonien s'écrit :

$$H=-J\sum_{ppv}\frac{(s_i+1)}{2}\frac{(s_j+1)}{2}+\mu\sum_{i=1}^{N}\frac{(s_i+1)}{2}=-\frac{J}{4}\sum_{ppv}s_is_j-\left(Jp-\frac{\mu}{2}\right)\sum_{i=1}^{N}s_i-\frac{NpJ}{4}$$

A une constante près sans influence sur les propriétés physiques, on retrouve un hamiltonien d'Ising où tous les sites sont occupés puisque $s_i=\pm 1$ en interaction avec le champ $B=\dfrac{Jp-\mu/2}{g\mu_B}$.

Corrigé exercice 4

1. $E_{\min}=-N\mu B$. Il y a une seul configuration qui correspond à cette énergie, l'entropie à cette énergie est donc nulle ($S=-k\sum_{\alpha}P_\alpha\ln\left(P_\alpha\right)$).
2. $E_{\max}=N\mu B$. L'entropie est encore nulle.
3. La probabilité d'un micro-état est donnée par : $P_\alpha=\exp\left(-E_\alpha/kT\right)/Z$. A température infinie, toutes ces probabilité sont identiques et valent $1/Z$. Par symétrie, l'énergie du système est donc nulle $(E=\sum_{\alpha}E_\alpha P_\alpha)$.
4. $Z=2\cosh^N\left(\mu B/kT\right)$; $F=-NkT\ln\left(2\cosh\left(\mu B/kT\right)\right)$
5. $U=-\partial\ln Z/\partial\beta=-N\mu B\tanh\left(\mu B/kT\right)$. Les énergies positives correspondent à des températures négatives.
6. On peut classer les températures de la même façon que les énergies. De la question 5, on voit que T est toujours une fonction croissante de l'énergie, mais que les températures négatives correspondent à des énergies positives. L'ordre des températures est donc : 1K, 100 K, 10^9 K, -10^9 K, -2 K. La variable $\beta=1/kT$ serait plus adaptée : β décroît régulièrement en fonction de l'énergie sans valeur singulière. Utilisons le critère de l'énoncé. À la mise en contact thermique de deux sous-systèmes globalement isolés, on doit avoir la condition qu'un échange d'énergie infinitésimal augmente l'entropie. Dans cet échange infinitésimal, la variation de l'entropie totale des deux sous-systèmes s'exprime simplement comme :
   $dS=dS_1+dS_2=dE_1/T_1+dE_2/T_2=dE_1\left(1/T_1-1/T_2\right)>0$.
   Le système qui cède de l'énergie est celui qui a la plus petite valeur de β, donc β est d'autant plus petite que l'énergie est grande.
7. La pression est définie par $P=-\left(\dfrac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$. Si on trouve un système pour lequel l'énergie croît avec le volume, alors on aura une pression négative. c'est le cas des systèmes autogravitants (voir le TD de première année sur l'effondrement gravitationnel des étoiles).