QUI VEUT GAGNER DES

$\mathcal{E}_i$ $Z$

# BOSONS ET DES FERMIONS

$\chi(T)$

QUI VEUT GAGNER DES

## Séance 1

# *Une complexion est une organisation…*

1 criminelle internationale de blanchiment d’argent sale

2 microscopique d’un système macroscopique

3 macroscopique d’un système microscopique ✔

4 mesoscopique d’un système fluide

o ***Question 1***

Une complexion est une organisation

***Réponse : microscopique d'un système macroscopique***

Un système macroscopique est constitué d'une collection d'états de ses composants microscopiques.

Ces états peuvent être par exemple des états d'énergie des particules qui le compose.

Chaque répartition de ces particules dans ces états constitue une complexion.

Plusieurs complexions différentes peuvent former un même état macroscopique.

**Complexion 1**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Etat 3 | ★ | ★ | |
| Etat 2 | ★ | | ★ |
| Etat 1 | ★ | | ★ |

**Complexion 2**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Etat 3 | ★ | | ★ |
| Etat 2 | ★ | | ★ |
| Etat 1 | ★ | | ★ |

Par exemple pour un système composé de 6 particules indiscernables pouvant se répartir sur 3 états chacun dégénéré en 3 cellules, les complexions **1** et **2** sont macroscopiquement équivalentes alors que la complexion **3** correspond à un état macroscopique différent.

**Complexion 3**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Etat 3 | ★ | | |
| Etat 2 | ★ | ★ | ★ |
| Etat 1 | ★ | | ★ |

L'état d'équilibre macroscopique est le plus probable, c'est celui qui est réalisé par le plus grand nombre de complexions.

L'entropie compte le nombre de complexions d'un système, à l'équilibre elle est maximale.

Un système est constitué de 1 état dégénéré en 3 cellules distinctes accessibles à 2 bosons et à 2 fermions.
Combien comporte-t-il de complexions ?

1 9

2 ✓ 18

3 72

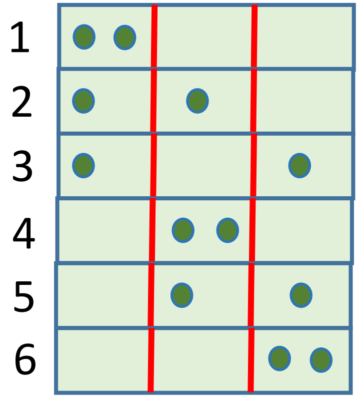
4 $\pi/7$

o ***Question 2***

Un système est constitué d’un état dégénéré en 3 cellules distinctes et accessibles à 2 bosons et à 2 fermions. Combien comporte-t-il de complexions ?

***Réponse : 18 complexions***

**Bosons**




Particules : $n_i = 2$

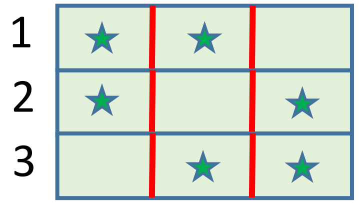
Parois : $p_i = 2$

Nombres d’objets à permuter : $n_i + p_i$

*Nombre de possibilités :*

$$C_{n_i}^{n_i+p_i} = \frac{(n_i+p_i)!}{p_i!\,n_i!} = \frac{1\times 2\times 3\times 4}{(1\times 2)\times(1\times 2)} = 6$$

**Fermions**




Cellules pleines : $n_i = 2$

Cellules vides : $v_i = 1$

Nombres d’objets à permuter : $n_i + v_i$

*Nombre de possibilités :*

$$C_{n_i}^{n_i+v_i} = \frac{(n_i+v_i)!}{v_i!\,n_i!} = \frac{1\times 2\times 3}{(1\times 2)\times(1)} = 3$$

**Total : 3x6 = 18**

***Le fait que les $N$ particules d'un système soient discernables ou non revient à multiplier ou non son nombre de complexions par $N!$***
***La prise en compte à l'équilibre du caractère discernable ou non des particules d'un système modifie***

1. toutes ses variables thermodynamiques
2. absolument que d'alle !
3. son entropie ✔
4. sa capacité calorifique

○ ***Question 3***

Le fait que les $N$ particules d'un système soient discernables ou non revient à multiplier ou non son nombre de complexions par $N!$

La prise en compte à l'équilibre du caractère discernable ou non des particules d'un système modifie

***Réponse : son entropie***

Prenons l'exemple de la distribution de Maxwell-Boltzmann

$$W^{\text{mbc}}(n_i) = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad \text{et} \quad W^{\text{mb}}(n_i) = N! \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} = N! W^{\text{mbc}}$$

Ainsi $\ln\left(W^{\text{mb}}\right) = \ln(N!) + \ln\left(W^{\text{mbc}}\right)$ qui se généralise en $\ln\left(W^{\text{d}}\right) = \ln(N!) + \ln\left(W^{\text{i}}\right)$

La distribution équilibre est définie par le postulat de Boltzmann : $n_i^{\text{eq}} = \max\limits_{n_i} \{k_B \ln W, \; E = cste, \; N = cste, \; \cdots\}$

La distribution d'équilibre ne dépend donc pas du caractère discernable ou non des particules.

L'énergie interne d'équilibre $U^{\text{eq}} = \sum\limits_i n_i^{\text{eq}} \varepsilon_i$ ou la capacité calorifique $C_V^{\text{eq}} = \left(\frac{\partial U^{\text{eq}}}{\partial T}\right)_V$

ne dépendent pas de $W$, ils ne sont pas affectés par le caractère discernable ou non des particules.

Par contre, l'entropie $S^{\text{eq}} = k_B \ln W\left(n_i^{\text{eq}}\right)$ est augmentée de $k_B \ln(N!)$ par la prise en compte du caractère discernable des particules. Elle est donc modifiée.

***A l’équilibre, le potentiel chimique d’un système de bosons dont l’énergie est fixée mais dont le nombre n’est pas fixé est***

1. 0 ✓
2. $+\infty$
3. compris entre 0 et $+\infty$
4. de toute beauté

o ***Question 4***

A l'équilibre, le potentiel chimique d'un système de bosons dont l'énergie est fixée mais dont le nombre n'est pas fixé est

***Réponse : nul.***

Pour les bosons a calculé $W^{\,\mathrm{be}} = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!\,(g_i - 1)!}$ puis $d \ln W^{\,\mathrm{be}} = \sum_i dn_i \ln\left(1 + \frac{g_i}{n_i}\right) = 0$

Le fait que l'énergie interne soit fixée implique que $dE = \sum_i dn_i\, \varepsilon_i = 0$

La résolution du problème de recherche d'extremum sous contrainte (recherche de la distribution d'équilibre) ne fait plus apparaître qu'un seul multiplicateur de Lagrange. On obtient

$$\sum_i dn_i \left[\ln\left(1 + \frac{g_i}{n_i^{\mathrm{eq}}}\right) - \beta\varepsilon_i\right] = 0$$

d'où l'on tire $n_i^{\mathrm{eq}} = \frac{g_i}{\exp(\beta\varepsilon_i) - 1}$ par comparaison avec la distribution de Bose-Einstein on voit que $\mu = 0$

QUI VEUT GAGNER DES

$\mathcal{E}_i$ $Z$

# BOSONS ET DES FERMIONS

$\chi(T)$

QUI VEUT GAGNER DES

A LA SEMAINE PROCHAINE !