

Autour de l'isotopie

## 1 Enrichissement de l'Uranium

### Question 1 —

L'effet de la rotation du cylindre est équivalent à une force d'inertie appliquée à chaque molécule  $\vec{F} = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$  où  $O$  correspond à la projection orthogonale sur l'axe de rotation du point  $M$  attaché à la molécule. Avec des notations évidentes dans la base cylindro-polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associée au cylindre  $\vec{\Omega} = \omega\vec{e}_z$  et  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$  donne bien  $\vec{F} = -m\omega\vec{e}_z \wedge (\omega\vec{e}_z \wedge r\vec{e}_r) = -m\omega^2 r\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = m\omega^2 r\vec{e}_r$ . Cette force dérive d'une énergie potentielle car on peut écrire  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varepsilon_r$  avec  $\varepsilon_r = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + cste$  la constante peut être prise nulle en choisissant l'origine des potentiels au niveau de l'axe de rotation.

**Question 2** — C'est celle qui maximise l'entropie  $S = k_B \ln W = k_B \sum_i \ln \left( \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \right) \simeq k_B \sum_i (n_i \ln g_i - n_i \ln n_i + n_i)$  sous les contraintes imposées. Comme dans le cours on trouve  $n_i = \lambda \exp(-\beta\varepsilon_i)$  où  $\lambda$  est une constante. En écrivant la condition de normalisation  $N = \sum_i n_i$  il vient  $n_i = \frac{N}{Z} g_i \exp(-\beta\varepsilon_i)$ . On écrit alors  $E = \sum_i n_i \varepsilon_i = \sum_i n_i \frac{N}{Z} g_i \exp(-\beta\varepsilon_i)$  que l'on écrit  $E = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ .

**Question 3** — On écrit  $S \simeq k_B \sum_i (n_i \ln g_i - n_i \ln n_i + n_i) = k_B \sum_i \left( n_i \ln \frac{g_i}{n_i} + n_i \right)$  avec  $n_i = \frac{N}{Z} g_i \exp(-\beta\varepsilon_i)$  il vient

$$\begin{aligned} S &= k_B \sum_i \left( n_i \ln \frac{g_i}{n_i} + n_i \right) = Nk_B + k_B \sum_i n_i \ln \left[ \frac{Z}{N} \exp(\beta\varepsilon_i) \right] \\ &= Nk_B + Nk_B \ln \left( \frac{Z}{N} \right) + k_B \beta E \implies S = \frac{E}{T} + k_B N \left[ A + \ln \left( \frac{Z}{N} \right) \right] \quad \text{avec } A = 1 \end{aligned}$$

On peut alors écrire  $F = E - TS$  soit avec l'expression de  $S$  obtenue  $F = -Nk_B T \left[ 1 + \ln \left( \frac{Z}{N} \right) \right]$ . En passant aux différentielles il vient  $dF = dE - TdS - SdT = -PdV - SdT$  on en déduit que  $P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$ . Finalement avec l'expression de  $F$  on trouve  $P = \frac{N}{\beta} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_\beta$ .

**Question 4** — On écrit  $Z = \sum_i g_i \exp(-\beta\varepsilon_i)$  soit dans la limite continue

$$Z = \int \frac{d\vec{p}d\vec{r}}{h^3} \exp \left( \frac{1}{2}\beta m\omega^2 r^2 - \frac{\beta p^2}{2m} \right)$$

On intègre sur tout l'espace des vitesses et sur tout le cylindre pour les positions ainsi

$$Z = \frac{1}{h^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{p} \exp \left( -\frac{\beta p^2}{2m} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_0^R r \exp \left( \frac{1}{2}\beta m\omega^2 r^2 \right) dr$$

L'intégrale sur les vitesses donne directement

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{p} \exp \left( -\frac{\beta p^2}{2m} \right) = \left( \frac{2m\pi}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}}$$

et celle sur les positions après une intégration par partie

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_0^R r \exp\left(\frac{1}{2}\beta m\omega^2 r^2\right) dr = \frac{2\pi H \left(e^{\frac{\beta m\omega^2 R^2}{2}} - 1\right)}{\beta m\omega^2}$$

et finalement

$$Z = \frac{2\pi H}{h^3 \beta m\omega^2} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \left(e^{\frac{\beta m\omega^2 R^2}{2}} - 1\right)$$

**Question 5** — En faisant apparaître le volume du cylindre  $V = \pi R^2 H$

$$Z = \frac{2\pi V}{h^3 R^2} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \left[\exp\left(\frac{\beta m\omega^2 V}{2\pi H}\right) - 1\right]$$

En faisant l'hypothèse que  $u = \frac{\beta m\omega^2 V}{2\pi H} \ll 1$  on peut développer l'exponentielle en série

$$Z = \frac{\beta m\pi\omega^2 V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta m\omega^2 V}{2\pi H}\right) + o\left(\frac{\beta m\omega^2 V}{2\pi H}\right)\right]$$

puis on prend le logarithme que l'on développe également en série

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln\left(\frac{\beta m\pi\omega^2}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right) + \ln V + \ln\left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta m\omega^2 V}{2\pi H}\right) + o(u)\right] \\ &= \ln\left(\frac{\beta m\pi\omega^2}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right) + \ln V + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta m\omega^2 V}{2\pi H}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\beta m\omega^2 V}{2\pi H}\right)^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la pression en dérivant par rapport au volume...

$$\begin{aligned} P &= \frac{N}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_\beta \\ &= \frac{N}{\beta V} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta m\omega^2 V}{2\pi H}\right) + o(u)\right] \implies B = \frac{1}{2} \\ &= \frac{N}{\beta \pi R^2 H} \left[1 + \frac{1}{4} \beta m\omega^2 R^2 + o(u)\right] \end{aligned}$$

**Question 6** — La pression moyenne dépend donc comme attendu de la masse. La différence de pression subie par les isotopes de l'Uranium dans le cas de l' $UF_6$  est donc à l'ordre le plus bas

$$\Delta P = P(^{238}UF_6) - P(^{235}UF_6) = \frac{N\omega^2}{4\pi H} [m(^{238}UF_6) - m(^{235}UF_6)]$$

Pour une mole de gaz tournant à 1500 tours par seconde (!) dans des cylindres de 20 cm on trouve  $\omega = 2\pi \times 1500 = 9,4 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , la différence de masse est simplement celle des 3 neutrons donc  $m(^{238}UF_6) - m(^{235}UF_6) = 5,0 \times 10^{-27} \text{ kg}$  ainsi

$$\Delta P = \frac{6,0 \times 10^{23} \cdot 9,4^2 \times 10^6 \cdot 5,0 \times 10^{-27}}{4\pi \cdot 0,2} = \frac{6,0 \cdot 9,4^2 \cdot 5,0}{4\pi \cdot 0,2} \times 10^2 = 1,05 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Soit une atmosphère ce qui n'est pas négligeable...

Au plus  $H$  est petit au plus la différence de pression est grande mais au plus notre approximation est fautive car  $R$  ne doit pas être trop grand pour que  $u \ll 1$ . Pour  $R = 5\text{cm}$  on vérifie qu'à des températures ambiantes avec  $m = m(^{238}\text{UF}_6) = 352 \times 10^{-27}\text{kg}$

$$u = \frac{m\omega^2 V}{2\pi H k_B T} = \frac{m\omega^2 V R^2}{2k_B T} = \frac{352 \times 10^{-27} \cdot 9,4^2 \times 10^6 \cdot 0,04}{2.300,1,4 \times 10^{-23}} = \frac{352 \times 9,4^2 \cdot 0,0025}{2.300,1,4} 10^2 = 0,09$$

ce qui n'est pas si petit que ça ...

Remarque : je pense que mon application numérique est illusoire ou trompeuse car un si faible volume ( $V \simeq 3 \times 0,05^2 \times 0,2 = 1,5 \cdot 10^{-3}\text{m}^3 \simeq 1\ell$ ) ne contient pas une mole d' $\text{UF}_6$  qui est une grosse molécule... Une mole de ce gaz dans ce petit volume à température ambiante doit être sous une bien plus grande pression que 1 atmosphère...

## 2 Culture générale éclairée

**Question 7** — Quelques possibilités de réponses.

Toute bonne synthèse de toutes les quantités fournies est la bienvenue : un tableau récapitulatif par exemple!

Voici des explications pour les données sur les vibrations et les potentiels.

Vibration des molécules :

Les atomes A et B de masse  $m_A$  et  $m_B$  formant une molécule AB sont reliés par un ressort de raideur  $K$ . Ce modèle harmonique est issu d'une linéarisation au voisinage de l'équilibre du potentiel d'interaction entre les deux atomes (figure 2.1 p.46 du livre de cours). Dans le référentiel galiléen du centre de masse  $G$  on écrit les équations du mouvement

$$\begin{cases} m_A \frac{d^2 \vec{GA}}{dt^2} = +K x \vec{u} \\ m_B \frac{d^2 \vec{GB}}{dt^2} = -K x \vec{u} \end{cases} \implies \frac{d^2}{dt^2} (\vec{GA} - \vec{GB}) = \frac{d^2 \vec{AB}}{dt^2} = -K \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) x \vec{u} = -\frac{K}{\mu} x \vec{u}$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire dirigé de A vers B,  $\mu$  la masse réduite et  $x$  l'élongation du ressort. Si l'on note  $\ell$  sa longueur à vide on a donc  $\vec{AB} = (\ell + x) \vec{u}$  l'équation de la vibration de la molécule s'écrit donc  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  avec  $\omega^2 = K/\mu$ . La fréquence de vibration de la molécule AB est donc affectée par la présence d'un isotope : cette relation explique par exemple la phrase *la fréquence de vibration de la molécule la plus lourde est la moins élevée*. La phrase les fonctions potentielles des deux molécules sont identiques, note le fait que la forme du potentiel d'interaction n'est pas modifiée par la présence d'un isotope car le nombre d'électrons qui façonnent ce potentiel n'est pas changé. En notant par une étoile la présence d'un isotope cette propriété implique par la même valeur de  $K$  dans les molécules AB, A\*B, AB\* et même A\*B\*.

On a donc le même  $K$  pour les molécules  $\text{H-}^{35}\text{Cl}$ ,  $\text{H-}^{37}\text{Cl}$  et  $\text{D-}^{35}\text{Cl}$  et les rapports de fréquence peuvent s'en déduire

$$\rho = \frac{\omega_{\text{H-}^{37}\text{Cl}}}{\omega_{\text{H-}^{35}\text{Cl}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{1} + \frac{1}{37}}}{\sqrt{\frac{1}{1} + \frac{1}{35}}} = 0,99925 \text{ et } \rho = \frac{\omega_{\text{D-}^{35}\text{Cl}}}{\omega_{\text{H-}^{35}\text{Cl}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{35}}}{\sqrt{\frac{1}{1} + \frac{1}{35}}} = 0,7169$$

très proches de ceux proposés par le texte...

L'énergie moyenne de vibration de la molécule ne dépend pas de la présence d'un isotope et ce n'est pas ce point qui permet de comprendre les différences de température de fusion ou d'ébullition... On peut le montrer facilement. En effet, la solution de l'équation de vibration est  $x(t) = X e^{i\omega t + \varphi}$ , l'énergie vibrationnelle est de la forme  $\varepsilon = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2$  et donc sa moyenne s'écrit

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu (\langle \dot{x}^2 \rangle + \omega^2 \langle x^2 \rangle) = \frac{1}{2} \mu \left[ X^2 \omega^2 \left( \frac{1}{2} \right) + \omega^2 X^2 \left( \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{\mu X^2 \omega^2}{2} = \frac{K X^2}{2}$$

Cette énergie moyenne est également reliée, par le théorème d'équipartition de l'énergie, à la température du gaz formé par ces molécules : avec deux degrés de liberté quadratiques de vibration (1 cinétique et 1 potentiel) par molécule AB on peut écrire  $\langle \varepsilon \rangle = 2 \times \frac{k_B T}{2} = k_B T$ . Le calcul précédent montre donc que la température  $T$  ne semble pas affectée par la présence d'isotopes.

En fait, c'est sans doute l'amplitude des oscillations qui l'est : les niveaux d'énergie dans un potentiel harmonique sont donnés par une relation de la forme  $\varepsilon_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$ , le niveau fondamental  $\varepsilon_0 = \hbar \omega / 2$  dépend donc de  $\omega$  et donc de la présence ou non d'un isotope... or c'est de ce niveau qu'il faut s'extraire pour sortir de l'approximation harmonique en changeant de phase (ébullition, fonte...). Le constat  $\omega^* < \omega$  pour un isotope plus lourd aura pour conséquence que  $\varepsilon_0^* < \varepsilon_0$ , partant de plus bas la marche à franchir est donc plus haute pour fondre ou bouillir... ce qui explique la tendance des chiffres proposés par le texte.

### 3 L'hélium a basse température

**Question 8** — Lorsque l'on sort du bain une fine couche d'eau recouvre notre corps. Pour s'évaporer cette eau à besoin d'une énergie, la chaleur latente d'évaporation, qu'elle puise à la surface de la peau : la température de celle-ci baisse... Lorqu'il fait chaud en été on peu considérablement diminuer la température d'une terrasse pour y consommer ses boissons préférées en arrosant ou mieux en brumisant de l'eau. Ce n'est pas tant la température de l'eau, un peu plus fraîche que celle de l'air, qui compte mais le fait qu'elle va s'évaporer puisant la chaleur latente dont elle a besoin dans le sol. etc...

**Question 9** — L' ${}^3\text{He}$  possède un noyau composé de 2 protons et de 1 neutron. Ces deux nucléons possèdent un spin de  $\frac{1}{2}$ , la composition d'un nombre impair de spin  $\frac{1}{2}$  conduit à un spin total demi entier ainsi le noyau d' ${}^3\text{He}$  est un fermion. Pour  ${}^4\text{He}$  dont le noyau est composé de 2 protons et de 2 neutrons on compose un nombre pair de spins  $\frac{1}{2}$  le résultat est donc entier, c'est un boson.

A basse température un gaz parfait d' ${}^3\text{He}$  voit toutes ses particules s'empiler sur les états de plus basse énergie successifs, l'état dont l'énergie est la plus élevée correspond à son énergie de Fermi. On peut comprendre cette affirmation en observant la distribution d'équilibre  $n_i ({}^3\text{He}) = \frac{g_i}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] + 1}$  si  $\beta \rightarrow \infty$  tant que  $\varepsilon_i < \mu$  alors  $n_i = g_i$  et dès que  $\varepsilon_i > \mu$  alors  $n_i = 0$ .

A basse température un gaz parfait d' ${}^4\text{He}$  voit toutes ses particules se rassembler dans le même état correspondant à celui de plus basse énergie, c'est la condensation de Bose. On peut comprendre cette affirmation en observant la distribution d'équilibre  $n_i ({}^3\text{He}) = g_i / \{ \exp [\beta (\varepsilon_i - \mu)] - 1 \}$ , si  $\beta \rightarrow \infty$  alors  $n_0 \rightarrow N = \sum_i n_i$  et  $n_{i>0} \rightarrow 0$ .

La superfluidité, sans parler de ce que cela pourrait-être, apparait sur la courbe lorsque la concentration en  ${}^3\text{He}$  devient suffisamment faible, il semblerait donc que ce soit une caractéristique de l' ${}^4\text{He}$  à basse température : c'est une propriété bosonique.

**Question 10** —

C'est un cycle que l'on retrouve dans la plupart des machines thermiques mais ici dans un contexte cryogénique un peu particulier.

Cette machine fonctionne en cycle fermé le fluide circulant pouvant être assimilé à de l'hélium 3 presque pur. Le cycle débute avec de l'hélium  ${}^3\text{He}$  gazeux prélevé dans l'évaporateur E à faible pression et à une température voisine de 1,3 K (a). Cet hélium sort du cryostat, est comprimé à température ambiante (b) par la pompe P et rentre dans le cryostat où il est liquéfié et refroidi (c) par un bain d'Hélium 4 à 1,3 K, ce bain B constituant la source chaude du cycle. L'hélium 3 circule alors dans l'échangeur à double courant S qui abaisse sa température, et pénètre dans la chambre de mélange M à l'intérieur de la phase riche en  ${}^3\text{He}$  (d) qui surmonte l'autre phase. Il passe ensuite dans la phase pauvre (e) en absorbant de la chaleur, la chambre de mélange étant ainsi la source froide du cycle. Le retour de l'Hélium 3 s'effectue par diffusion à travers l'Hélium 4 dans la deuxième branche de l'échangeur jusqu'à l'évaporateur E (f). Cette diffusion s'effectuant en sens inverse de la pesanteur est due à l'existence dans le tube de retour d'un gradient de concentration en Hélium 3 créant une pression osmotique. Le cycle se termine alors dans l'évaporateur E où l'hélium 3 presque pur se vaporise...