Travaux dirigés de physique statistique
PA 201
Un magnifique gaz de fermions dégénérés
Correction

1. Rappel sur le calcul des constantes de Fermi d'un gaz parfait de fermions.

   A température nulle la fonction de Fermi est une fonction de Heaviside de l'énergie de Fermi $\Theta(\varepsilon - \varepsilon_f)$. On peut donc calculer exactement le nombre de particules dans la limite thermodynamique

$$N = \sum_i n_i^{fd}(T=0) \to \int_0^{\varepsilon_f} g(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

   la densité d'états s'écrit comme d'habitude pour un gaz parfait

$$g(\varepsilon)\, d\varepsilon = g(p)\, dp = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp$$

   l'énergie de chaque électron est purement cinétique $\varepsilon = p^2/(2m_e)$ on peut ainsi définir l'impulsion de Fermi p_f par la relation

$$p_f = (2m_e\varepsilon_f)^{1/2}$$

   Sachant que pour les électrons la dégénérescence interne est celle associée aux 2 états de spin $(g_s = 2)$ on a donc

$$\begin{aligned} N &= 2 \times \frac{V}{h^3} 4\pi \int_0^{p_f} p^2 dp \\ &= \frac{8\pi V}{3h^3} p_f^3 \end{aligned}$$

   en inversant cette relation et en introduisant $\hbar = h/2\pi$, on obtient

$$\boxed{p_f = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3}}$$

   et donc pour l'énergie de Fermi et la température de Fermi correspondante

$$\varepsilon_f = \frac{p_f^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3} \quad \text{et} \quad \theta_f = \frac{\varepsilon_f}{k}$$

   en utilisant l'expression $N = \frac{M}{2m_p}$ et le fait que l'étoile est sphérique de rayon R on obtient

$$\varepsilon_f = \frac{p_f^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e R^2}\left(\frac{M}{m_p}\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3}$$

   numériquement on trouve

$$\varepsilon_f = 1,60 \times 10^{-14}\,\mathrm{J} = 99,6\ \mathrm{Kev} \quad \text{et} \quad \theta_f = 1,15 \times 10^9\,\mathrm{K}$$

   avec ses quelques dizaines de millions de K (dans le cœur, de quelques dizaines de milliers en surface), on est bien loin de la température de Fermi. Pour tous les calculs on peut donc se placer à température nulle.

2. Calcul de l'énergie interne et de la pression.

   Le calcul de l'énergie interne à $T = 0\,\mathrm{K}$ se fait toujours dans la limite hydrodynamique

$$U = \sum_i \varepsilon_i n_i^{fd}\,(T=0) \rightarrow \frac{V}{\pi^2\,\hbar^3}\int_0^{p_f} \varepsilon\, p^2 dp \tag{1}$$

   avec $\varepsilon = p^2/2m_e$ on obtient

$$U = \frac{V}{2m_e\pi^2\,\hbar^3}\int_0^{p_f} p^4 dp \qquad \text{soit } U = \frac{V\,p_f^5}{10m_e\pi^2\,\hbar^3}$$

   en remplaçant p_f par sa valeur calculée précédemment (formule (1)), on trouve finalement

$$\boxed{U = \left(\frac{243\pi^4}{1000}\right)^{1/3}\frac{\hbar^2}{m_e}N^{5/3}V^{-2/3}}$$

   A température nulle énergies interne U et libre $F = U - TS$ se confondent, le second principe de la thermodynamique $dU = TdS - PdV$ permet d'avoir

$$\begin{aligned} dF &= dU - TdS - SdT \\ &= -PdV - SdT \end{aligned}$$

   ainsi

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \qquad \text{et donc à } T = 0\,\mathrm{K}\,,\;\; P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$$

   soit

$$\boxed{P = \frac{(9\pi^4)^{1/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}}$$

   En prenant toujours $N = M/(2m_p)$, et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, on parvient finalement à

$$\boxed{P = \frac{\hbar^2}{15m_e\,\pi^{1/3}}\left(\frac{9M}{8m_p}\right)^{5/3}\frac{1}{R^5}}$$

   La pression de dégénérescence associée aux noyaux est plus faible car ils sont plus lourds ...

   À rayon égal, c'est donc bien la pression des électrons qui est prépondérante !

3. La pression gravitationnelle P_G subie par la surface de la naine blanche peut être évaluée par un raisonnement thermodynamique : l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet homogène de masse M et de rayon R est bien connue des spécialistes (sauriez-vous le refaire ...[1])

$$E_p = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

   On peut déterminer le travail gravitationnel associé une contraction élémentaire sphérique de la surface

$$\delta W = dE_p = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R^2}dR$$

[1] Par définition $E_c = \int \psi\rho d\vec{r}$, le potentiel à l'intérieur d'une boule homogène de densité ρ_o et de rayon R est $\psi = -2\pi G\rho_o(R^2 - r^2/3)$ on intègre sur la boule et on fait apparaître la masse $M = 4\pi R^3/3$, facile ...

en écrivant la relation thermodynamique $\delta W = -P_G dV$ avec dans le cas sphérique $dV = 4\pi R^2$ on obtient

$$-P_G 4\pi R^2 dR = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R^2}dR \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P_G = -\frac{3}{20\pi}\frac{GM^2}{R^4}}$$

C'est ce que l'on peut identifier comme la pression due aux forces de gravitation à la surface de l'étoile. En émettant l'hypothèse que cette pression gravitationnelle qui tend à comprimer l'étoile est contrebalancée par la pression interne de l'étoile (celle des électrons dégénérés pour la naine blanche...) on obtient

$$P_G + P = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\hbar^2}{15 m_e\, \pi^{1/3}}\left(\frac{9M}{8m_p}\right)^{5/3}\frac{1}{R^5} = \frac{3}{20\pi}\frac{GM^2}{R^4}$$

en faisant un peu de ménage on trouve

$$\boxed{RM^{\frac{1}{3}} = \frac{\hbar^2}{8Gm_e m_p}\left(\frac{9\pi}{m_p}\right)^{2/3}}$$

Pour une masse donnée de l'étoile il suffit donc de la comprimer suffisamment pour atteindre le rayon prévu par cette équation pour que la pression de dégénérescence des électrons équilibre la gravitation ...

Pour la naine blanche que nous considérons ($M = 2\cdot 10^{30}$kg et $R = 10^7$m)on trouve

$$RM^{\frac{1}{3}} = 1,23 \cdot 10^{17} \ \mathrm{m\,.\,kg}^{1/3}$$

alors que

$$\frac{\hbar^2}{8Gm_e m_p}\left(\frac{9\pi}{m_p}\right)^{2/3} = 9,00 \times 10^{16}\,\mathrm{m\,.\,kg}^{1/3}$$

L'accord est très correct, mais la théorie est fausse par principe !

Pour la petite histoire ce calcul fait par Fowler en 1925 sous la houlette d'Eddington rassura ce dernier quant à l'impossibilité physique de l'existence des trous noirs ... Une implication, due à Schwarzschild en 1916, de la relativité générale prévoit en effet qu'une masse solaire incluse dans un rayon de quelques kilomètres crée une région de l'espace temps que certains esprits de l'époque n'étaient pas près d'accepter.

Un tel rayon est inaccessible à une telle masse selon le modèle de Fowler car la pression de dégénérescence des électrons interdit un tel niveau de compression ... Le travail d'un jeune indien, Subrahmanyan Chandrasekhar, allait prouver le contraire.

4. L'ordre de grandeur de l'impulsion des électrons est l'impulsion de Fermi que nous avons calculé à la première question

$$p_f = \hbar\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\hbar}{R}\left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

sans hypothèse particulière $p = m_e v$, la vitesse caractéristique des électrons est donc

$$v = \frac{p_f}{m_e} = \frac{\hbar}{Rm_e}\left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Numériquement on trouve que v est de l'ordre de 63% de la vitesse de la lumière : les électrons ne peuvent pas être supposés classique, ils sont relativistes !

5. Lorsqu'un électron devient relativiste, son énergie cinétique n'est plus seulement due à sa vitesse, son énergie de masse intervient, on doit procéder au changement

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

le calcul de l'énergie et donc de la pression à $T = 0$ sont modifiés dans la limite hydrodynamique, mais pas celui de p_f. La relation (1) devient dans le cas relativiste

$$U = \frac{V}{\pi^2\,\hbar^3}\int_0^{p_f}\left(p^2c^2 + m^2c^4\right)^{1/2}\; p^2dp$$

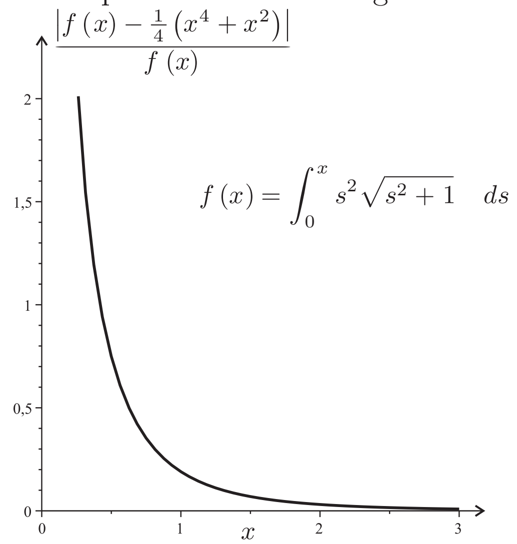
en posant $x = p/mc$, et donc $x_f = p_f/m_ec$, l'énergie devient

$$U = \frac{V\,m^4\,c^5}{\pi^2\,\hbar^3}\int_0^{x_f} x^2\sqrt{x^2+1}\,dx$$

une petite application numérique donne

$$x_f = \frac{p_f}{m_ec} = \frac{\hbar}{m_ec}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3} = \frac{\hbar}{Rm_ec}\left(\frac{M}{m_p}\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \simeq 0,626$$

Même si x_f n'est pas énorme, le développement proposé par l'énoncé peut être tronqué aux deux premiers termes, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous.



Ainsi

$$U \simeq \frac{V\,m^4\,c^5}{4\pi^2\,\hbar^3}\left(x_f^4 + x_f^2\right) = \frac{m^4\,c^5}{4\pi^2\,\hbar^3}\left(\frac{\hbar^4}{m_e^4c^4}V^{-1/3}\left(3\pi^2N\right)^{4/3} + V^{1/3}\frac{\hbar^2}{m_e^2c^2}\;\left(3\pi^2N\right)^{2/3}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} P &= -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \\ &= \frac{m^4\,c^5}{12\pi^2\,\hbar^3}\,x_f^2\left(x_f^2 - 1\right) \end{aligned}$$

6. Il ne reste plus qu'à équilibrer cette pression avec la pression gravitationnelle, on obtient

$$\frac{m^4\, c^5}{12\pi^2\, \hbar^3}\, x_f^2 \left(x_f^2 - 1\right) = \frac{3}{20\pi}\frac{GM^2}{R^4}$$

on se rappelle que

$$x_f = \frac{\hbar}{m_e c}\,\left(\frac{M}{m_p}\frac{9\pi}{8R^3}\right)^{1/3} = \frac{\hbar}{m_e c}\,\left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{1/3}\frac{1}{R} = \frac{R_c}{R}$$

où l'on a posé

$$\boxed{R_c = \frac{\hbar}{m_e c}\,\left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{1/3} \simeq 6260\text{km}}$$

l'équation d'équilibre s'écrit donc

$$\frac{m_e^4\, c^5}{12\pi^2\, \hbar^3}\, R_c^2 \left(\frac{R_c^2}{R^2} - 1\right) = \frac{3}{20\pi}\frac{GM^2}{R^2}$$

soit

$$(R_c^4 - R_c^2 R^2) = \frac{9\pi\hbar^3 GM^2}{5m_e^4\, c^5}$$

$$\Leftrightarrow \quad R^2 = R_c^2\left(1 - \frac{9\pi\hbar^3 GM^2}{5m^4\, c^5 R_c^4}\right)$$

un dernier calcul donne

$$\frac{9\pi\hbar^3 GM^2}{5m_e^4\, c^5 R_c^4} = \frac{9\pi\hbar^3 GM^2 m_e^4 c^4}{5m_e^4\, c^5\, \hbar^4\left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{4/3}} = \frac{(8m_p)^{4/3}\, G}{5\,(9\pi)^{1/3}\, c\hbar} M^{2/3}$$

nous sommes donc conduits à introduire la masse de Chandrasekhar

$$\boxed{M_c^{2/3} = \frac{5\,(9\pi)^{1/3}\, c\hbar}{(8m_p)^{4/3}\, G} \quad \text{soit } M_c = \frac{3\sqrt{\pi}}{64m_p^2}\left(\frac{5c\hbar}{G}\right)^{3/2} \simeq 3,42\times 10^{30}\text{kg} \simeq 1,5M_\odot}$$

pour avoir finalement

$$\boxed{R^2 = R_c^2\left[1 - \left(\frac{M}{M_c}\right)^{2/3}\right]}$$

on constate sans peine que l'équilibre est possible tant que $M < M_c$. Si la masse de la naine blanche est plus grande que la masse de Chandrasekhar, il n'y a plus équilibre l'étoile s'effondre vers un nouvel état : l'étoile à neutron, puis, potentiellement vers un objet plus compact ! On comprend qu'Eddington, farouche opposant à l'idée de trou noir accueillit fraîchement ce calcul fait par le jeune indien sur le bateau qui l'amenait d'Inde en Angleterre... mais ceci est une autre histoire ...