Physique Statistique

Le gaz parfait de fermions

Distribution d'équilibre

Distribution d’équilibre

$$n_i^{fd} = \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \quad \leftarrow \quad \max_{n-i} W^f = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad U = cste, \; N = cste$$

n_i^{fd} est toujours positif : pas de contrainte sur le potentiel chimique

Distribution d'équilibre

$$n_i^{fd} = \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \quad \leftarrow \quad \max_{n-i} W^f = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad U = cste, \;\; N = cste$$

n_i^{fd} est toujours positif : pas de contrainte sur le potentiel chimique
Conservation du nombre de particules

$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

permet théoriquement de calculer $\mu = \mu(\beta, V, ?)$ ...

Distribution d'équilibre

$$n_i^{fd} = \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \quad \leftarrow \quad \max_{n-i} W^f = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad U = cste, \ N = cste$$

n_i^{fd} est toujours positif : pas de contrainte sur le potentiel chimique
Conservation du nombre de particules

$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

permet théoriquement de calculer $\mu = \mu(\beta, V, ?)$ ...

À l'équilibre, U et S sont le résultat des sommes

$$U = \sum_i \varepsilon_i n_i^{fd} \quad \text{et} \quad S = k \ln W^f(n_i^{fd})$$

Distribution d'équilibre

$$n_i^{fd} = \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \quad \leftarrow \quad \max_{n-i} W^f = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad U = cste, \; N = cste$$

n_i^{fd} est toujours positif : pas de contrainte sur le potentiel chimique
Conservation du nombre de particules

$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

permet théoriquement de calculer $\mu = \mu(\beta, V, ?)$ ...

À l'équilibre, U et S sont le résultat des sommes

$$U = \sum_i \varepsilon_i n_i^{fd} \quad \text{et} \quad S = k \ln W^f(n_i^{fd})$$

...Stirling ..(on pose toujours $\chi = \beta\mu$)

$$\ln W^f = \beta U - \chi N + \sum_i g_i \ln\left[1 + \exp\left(\chi - \beta\varepsilon_i\right)\right]$$

Distribution d'équilibre

$$n_i^{fd} = \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \quad \leftarrow \quad \max_{n-i} W^f = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad U = cste, \; N = cste$$

n_i^{fd} est toujours positif : pas de contrainte sur le potentiel chimique
Conservation du nombre de particules

$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

permet théoriquement de calculer $\mu = \mu(\beta, V, ?)$ ...

À l'équilibre, U et S sont le résultat des sommes

$$U = \sum_i \varepsilon_i n_i^{fd} \quad \text{et} \quad S = k \ln W^f(n_i^{fd})$$

On en déduit l'énergie libre de Helmoltz ($\chi = \beta\mu$)

$$F = U - \frac{\ln W}{\beta} = \frac{\chi N}{\beta} - \frac{1}{\beta} \sum_i g_i \ln\left[1 + \exp\left(\chi - \beta\varepsilon_i\right)\right]$$

La fonction de Fermi

À l'équilibre β, le nombre moyen $\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i)$ de fermions dans une cellule de l'espace des phases est donné par la fonction de Fermi-Dirac

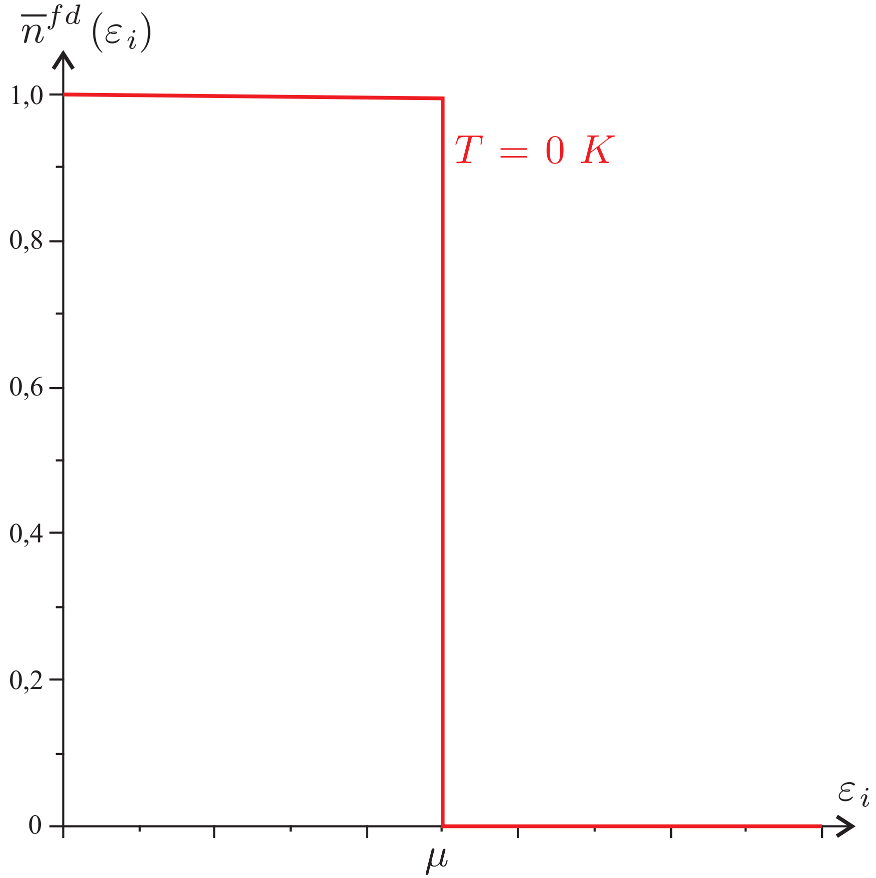
$$\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) = \frac{n^{fd}}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$ Principe d'exclusion de Pauli : $0 \leq \overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) \leq 1$

La fonction de Fermi

À l'équilibre β, le nombre moyen $\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i)$ de fermions dans une cellule de l'espace des phases est donné par la fonction de Fermi-Dirac

$$\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) = \frac{n^{fd}}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

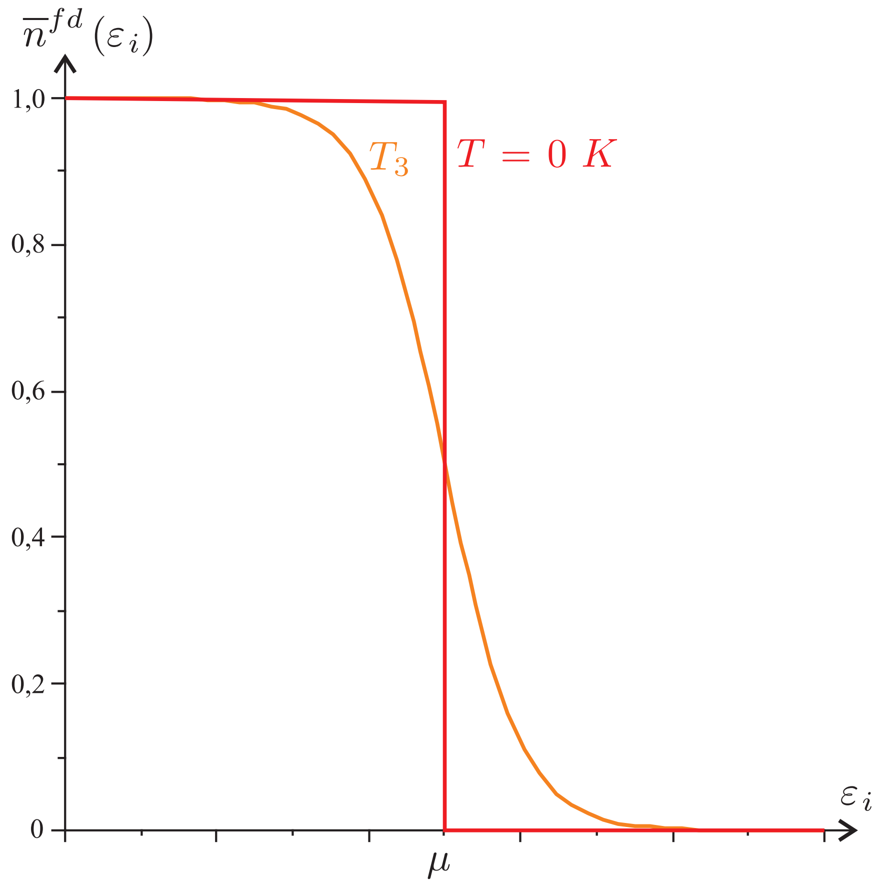
Principe d'exclusion de Pauli : $0 \leq \overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) \leq 1$



La fonction de Fermi

À l'équilibre β, le nombre moyen $\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i)$ de fermions dans une cellule de l'espace des phases est donné par la fonction de Fermi-Dirac

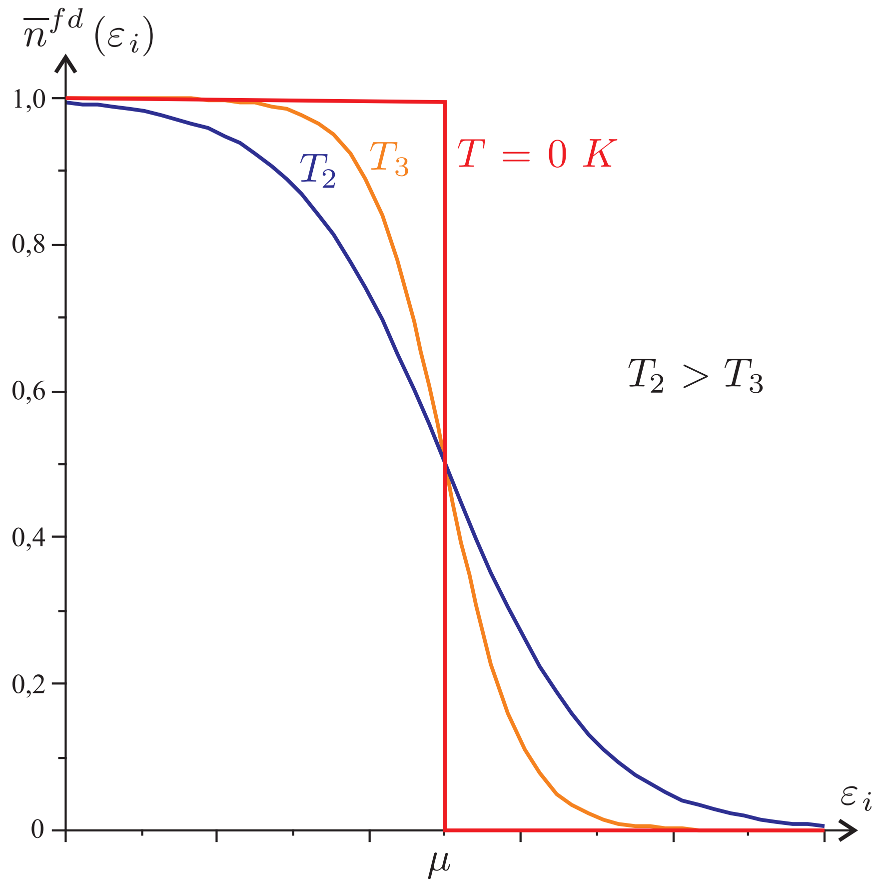
$$\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) = \frac{n^{fd}}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$ Principe d'exclusion de Pauli : $0 \leq \overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) \leq 1$



La fonction de Fermi

À l'équilibre β, le nombre moyen $\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i)$ de fermions dans une cellule de l'espace des phases est donné par la fonction de Fermi-Dirac

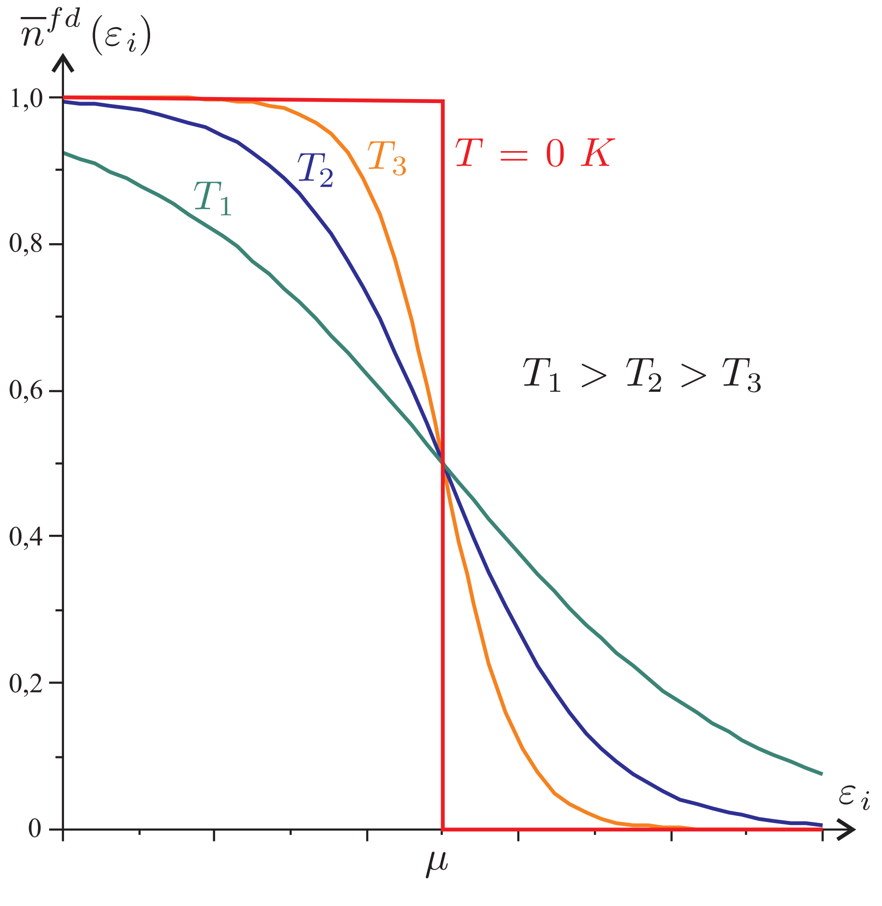
$$\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) = \frac{n^{fd}}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1}$$ Principe d'exclusion de Pauli : $0 \leq \overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) \leq 1$



La fonction de Fermi

À l'équilibre β, le nombre moyen $\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i)$ de fermions dans une cellule de l'espace des phases est donné par la fonction de Fermi-Dirac

$$\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) = \frac{n^{fd}}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$ Principe d'exclusion de Pauli : $0 \leq \overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) \leq 1$

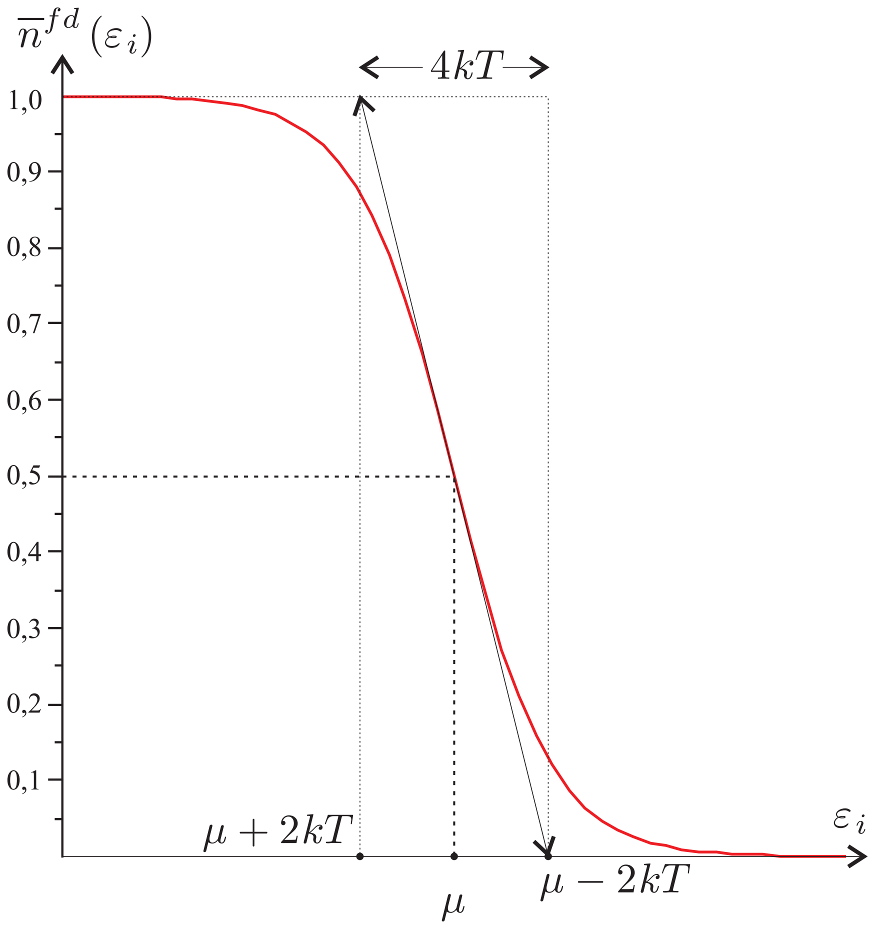


La fonction de Fermi

À l'équilibre β, le nombre moyen $\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i)$ de fermions dans une cellule de l'espace des phases est donné par la fonction de Fermi-Dirac

$$\overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) = \frac{n^{fd}}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

Principe d'exclusion de Pauli : $0 \leq \overline{n}^{fd}(\varepsilon_i) \leq 1$



Limite thermodynamique (continue)

Hypothèse à discuter

Limite thermodynamique (continue)

Hypothèse à discuter

Expression de l'énergie libre : densité d'états

$$g\left(p\right)dp = \frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp \;\longrightarrow\; F = \frac{\chi N}{\beta} - \frac{1}{\beta}\int g\left(p\right)\ln\left[1+\exp\left(\chi-\beta\varepsilon\right)\right]dp$$

Limite thermodynamique (continue)

Hypothèse à discuter

Expression de l'énergie libre : densité d'états

$$g\left(p\right)dp = \frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp \;\rightarrow\; F = \frac{\chi N}{\beta} - \frac{1}{\beta}\int g\left(p\right)\ln\left[1 + \exp\left(\chi - \beta\varepsilon\right)\right]dp$$

Gaz parfait de particules de masse m non relativistes

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \text{ soit } \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}}d\varepsilon = dp$$

Limite thermodynamique (continue)

Hypothèse à discuter

Expression de l'énergie libre : densité d'états

$$g\left(p\right)dp = \frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp \;\rightarrow\; F = \frac{\chi N}{\beta} - \frac{1}{\beta}\int g\left(p\right)\ln\left[1+\exp\left(\chi-\beta\varepsilon\right)\right]dp$$

Gaz parfait de particules de masse m non relativistes

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \quad \text{soit} \quad \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}}d\varepsilon = dp$$

ainsi

$$g\left(p\right)dp = \frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp = 2\pi\frac{V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

Limite thermodynamique (continue)

Hypothèse à discuter

Expression de l'énergie libre : densité d'états

$$g\left(p\right)dp = \frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp \;\rightarrow\; F = \frac{\chi N}{\beta} - \frac{1}{\beta}\int g\left(p\right)\ln\left[1+\exp\left(\chi-\beta\varepsilon\right)\right]dp$$

Gaz parfait de particules de masse m non relativistes

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \quad \text{soit} \quad \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}}d\varepsilon = dp$$

ainsi

$$g\left(p\right)dp = \frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp = 2\pi\frac{V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

$$\boxed{g\left(\varepsilon\right)d\varepsilon = 2g_s\pi\frac{V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon \quad \text{(Dégénérescence interne)}}$$

Limite thermodynamique (continue)

Hypothèse à discuter

Expression de l'énergie libre : densité d'états

$$g\left(p\right)dp = \frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp \;\rightarrow\; F = \frac{\chi N}{\beta} - \frac{1}{\beta}\int g\left(p\right)\ln\left[1+\exp\left(\chi-\beta\varepsilon\right)\right]dp$$

Gaz parfait de particules de masse m non relativistes

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \quad \text{soit} \quad \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}}d\varepsilon = dp$$

ainsi

$$g\left(p\right)dp = \frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp = 2\pi\frac{V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

$$\boxed{g\left(\varepsilon\right)d\varepsilon = 2g_s\pi\frac{V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon \quad \text{(Dégénérescence interne)}}$$

on trouve maintenant

$$F = \frac{N}{\beta}\left[\chi - \frac{h\left(\chi\right)}{\alpha}\right] \quad \text{avec} \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{N}{Z} \\ \text{et} \\ h\left(\chi\right) = +\dfrac{2g_s}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\ln\left[1+\exp\left(\chi-x\right)\right]dx \end{array}\right.$$

$$N = \int \frac{g\left(p\right) dp}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} = 2 g_s \pi \frac{V}{h^3} \left(\frac{2m}{\beta} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^{x-\chi} + 1}$$

$$N = \int \frac{g\left(p\right)dp}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} = 2g_s\pi\frac{V}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$= Z\frac{2g_s}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$N=\int \frac{g\left(p\right)dp}{e^{\beta\left(\varepsilon-\mu\right)}+1}=2g_s\pi\frac{V}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$=Z\frac{2g_s}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$\left(\text{Rappel : } h\left(\chi\right)=+\frac{2g_s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\ln\left[1+\exp\left(\chi-x\right)\right]dx\right)$$

$$N = \int \frac{g(p)\,dp}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} = 2g_s\pi \frac{V}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$= Z\frac{2g_s}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$\left(\text{Rappel : } h(\chi) = +\frac{2g_s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\ln\left[1+\exp(\chi-x)\right]dx\right)$$

$$\Rightarrow\ N = Z\frac{dh}{d\chi}$$

$$N = \int \frac{g\left(p\right)dp}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} = 2g_s\pi\frac{V}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$= Z\frac{2g_s}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$\left(\text{Rappel : } h\left(\chi\right) = +\frac{2g_s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\ln\left[1+\exp\left(\chi-x\right)\right]dx\right)$$

$$\Rightarrow\ N = Z\frac{dh}{d\chi}$$

On obtient finalement

$$\alpha = \frac{N}{Z} = h'\left(\chi\right)$$

$$N=\int \frac{g\left(p\right)dp}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}=2g_s\pi\frac{V}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$=Z\frac{2g_s}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$\left(\text{Rappel : } h\left(\chi\right)=+\frac{2g_s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\ln\left[1+\exp\left(\chi-x\right)\right]dx\right)$$

$$\Rightarrow\ N=Z\frac{dh}{d\chi}$$

On obtient finalement

$$\alpha=\frac{N}{Z}=h'\left(\chi\right)$$

et pour l'énergie libre

$$F=\frac{N}{\beta}\left[\chi-\frac{h\left(\chi\right)}{h'\left(\chi\right)}\right]$$

Si l'on sait calculer $h\left(\chi\right)$ on connait F et toutes les grandeurs thermodynamiques.

$$N = \int \frac{g(p)\,dp}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} = 2g_s\pi\frac{V}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$= Z\frac{2g_s}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^{x-\chi}+1}$$

$$\left(\text{Rappel : } h(\chi) = +\frac{2g_s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\ln\left[1+\exp\left(\chi-x\right)\right]dx\right)$$

$$\Rightarrow \; N = Z\frac{dh}{d\chi}$$

On obtient finalement

$$\alpha = \frac{N}{Z} = h'(\chi)$$

et pour l'énergie libre

$$F = \frac{N}{\beta}\left[\chi - \frac{h(\chi)}{h'(\chi)}\right]$$

Si l'on sait calculer $h(\chi)$ on connait F et toutes les grandeurs thermodynamiques.

$$\boxed{\alpha = \frac{N}{Z(\beta,V)} = h'(\chi) = \alpha(\beta,V)}$$

$\Rightarrow \quad h(\chi)$ et χ sont des fonctions de β et V

Grandeurs thermodynamiques

Grandeurs thermodynamiques

- Relations préliminaires ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial V}\right)_\beta = -\dfrac{\alpha}{V} \text{ et } \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial \chi}\right)_\beta = h''(\chi) \\ \\ \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right)_V = \frac{3}{2}\dfrac{\alpha}{\beta} \text{ et } \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial \chi}\right)_V = h''(\chi) \end{array} \right.$$

... $$\left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right)_V = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \chi}\right)_\beta = \frac{1}{h''(\chi)}$$

Grandeurs thermodynamiques

Relations préliminaires ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial V}\right)_\beta = -\frac{\alpha}{V} \text{ et } \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \chi}\right)_\beta = h''(\chi) \\ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right)_V = \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\beta} \text{ et } \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \chi}\right)_V = h''(\chi) \end{array} \right. \quad \ldots \left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right)_V = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \chi}\right)_\beta = \frac{1}{h''(\chi)}$$

Pression

$$\begin{aligned} P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_\beta &= -\frac{N}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\left[\chi - \frac{h(\chi)}{\alpha}\right]_\beta \\ &= \frac{N}{V\beta}\frac{h(\chi)}{h'(\chi)} \end{aligned}$$

...

Entropie (à partir de F)

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = k\beta^2\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V = NK\left(\frac{5}{2}\frac{h(\chi)}{h'(\chi)} - \chi\right)$$

...

Entropie (à partir de F)

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = k\beta^2\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V = NK\left(\frac{5}{2}\frac{h(\chi)}{h'(\chi)} - \chi\right)$$

Énergie interne

$$U = F + TS = F + \frac{1}{k\beta}S$$

$$\frac{3}{2}\frac{N}{\beta}\frac{h(\chi)}{h'(\chi)}$$

...

Entropie (à partir de F)

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = k\beta^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V = NK\left(\frac{5}{2}\frac{h(\chi)}{h'(\chi)} - \chi\right)$$

Énergie interne

$$U = F + TS = F + \frac{1}{k\beta}S$$

$$\frac{3}{2}\frac{N}{\beta}\frac{h\left(\chi\right)}{h'\left(\chi\right)}$$

Chaleur spécifique

$$C_V = -k\beta^2\left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_V$$

$$= \frac{3}{2}kN\left[\frac{h\left(\chi\right)}{h'\left(\chi\right)} - \frac{3h'\left(\chi\right)}{2h''\left(\chi\right)}\right]$$

Etc...

Grandeurs thermo. à $T = 0$

Définition : Énergie de Fermi $\varepsilon_f := \mu\,(T = 0)$

Grandeurs thermo. à $T = 0$

Définition : Énergie de Fermi $\varepsilon_f := \mu\,(T = 0)$ On a donc

$$n_i^{fd}\,(T = 0) = \Theta\left(\varepsilon_i - \varepsilon^f\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } \varepsilon_i \leq \varepsilon_f \\ 0 \text{ si } \varepsilon_i > \varepsilon_f \end{cases}$$

ε_f est l'énergie maximale d'un fermion à $T = 0$.

Grandeurs thermo. à $T = 0$

Définition : Énergie de Fermi $\varepsilon_f := \mu\left(T = 0\right)$ On a donc

$$n_i^{fd}\left(T = 0\right) = \Theta\left(\varepsilon_i - \varepsilon^f\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } \varepsilon_i \leq \varepsilon_f \\ 0 \text{ si } \varepsilon_i > \varepsilon_f \end{cases}$$

ε_f est l'énergie maximale d'un fermion à $T = 0$.
On peut la calculer :

$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \longrightarrow \int g\left(\varepsilon\right) \Theta\left(\varepsilon - \varepsilon_f\right) d\varepsilon = 2 g_s \pi \frac{V}{h^3} \left(2m\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

$$\text{soit } N = \frac{4}{3} g_s \pi \frac{V}{h^3} \left(2m\right)^{3/2} \varepsilon_f^{3/2}$$

Grandeurs thermo. à $T = 0$

Définition : Énergie de Fermi $\varepsilon_f := \mu\left(T=0\right)$ On a donc

$$n_i^{fd}\left(T=0\right) = \Theta\left(\varepsilon_i - \varepsilon^f\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } \varepsilon_i \leq \varepsilon_f \\ 0 \text{ si } \varepsilon_i > \varepsilon_f \end{cases}$$

ε_f est l'énergie maximale d'un fermion à $T = 0$.
On peut la calculer :

$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \longrightarrow \int g\left(\varepsilon\right)\Theta\left(\varepsilon - \varepsilon_f\right) d\varepsilon = 2 g_s \pi \frac{V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

$$\text{soit } N = \frac{4}{3} g_s \pi \frac{V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2} \varepsilon_f^{3/2}$$

on a donc

$$\varepsilon_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$$

Remarque : $\varepsilon_f = \varepsilon_f\left(n = \dfrac{N}{V}\right)$

Quelques valeurs numériques

Quelques valeurs numériques

- Air (gaz parfait) à $T = 0°$ C

Quelques valeurs numériques

- Air (gaz parfait) à $T = 0^\circ$ C

$$n = 3 \times 10^{19} \text{ molécules par } \mathrm{cm}^3$$

Quelques valeurs numériques

- Air (gaz parfait) à $T = 0°$ C

$$n = 3 \times 10^{19} \text{ molécules par } \mathrm{cm}^3$$

- Électrons libres dans un conducteur

Quelques valeurs numériques

- Air (gaz parfait) à $T = 0°$ C

$$n = 3 \times 10^{19} \text{ molécules par } \mathrm{cm}^3$$

- Électrons libres dans un conducteur

$$n = 5 \times 10^{22} \text{ électrons par } \mathrm{cm}^3 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_f^{e^-,\text{sol}} \simeq 5 \text{ eV}$$

Quelques valeurs numériques

- Air (gaz parfait) à $T = 0°$ C

$$n = 3 \times 10^{19} \text{ molécules par } \mathrm{cm}^3$$

- Électrons libres dans un conducteur

$$n = 5 \times 10^{22} \text{ électrons par } \mathrm{cm}^3 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_f^{e^-,\text{sol}} \simeq 5 \text{ eV}$$

- Électrons libres dans une naine blanche

Quelques valeurs numériques

- Air (gaz parfait) à $T = 0°$ C

$$n = 3 \times 10^{19} \text{ molécules par } \mathrm{cm}^3$$

- Électrons libres dans un conducteur

$$n = 5 \times 10^{22} \text{ électrons par } \mathrm{cm}^3 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_f^{e^-,\text{sol}} \simeq 5 \text{ eV}$$

- Électrons libres dans une naine blanche

$$n = 5 \times 10^{30} \text{ électrons par } \mathrm{cm}^3 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_f^{e^-,\text{nb}} \simeq 0.36 \text{ MeV}$$

Quelques valeurs numériques

- Air (gaz parfait) à $T = 0°$ C

$$n = 3 \times 10^{19} \text{ molécules par } \mathrm{cm}^3$$

- Électrons libres dans un conducteur

$$n = 5 \times 10^{22} \text{ électrons par } \mathrm{cm}^3 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_f^{e^-,\text{sol}} \simeq 5 \text{ eV}$$

- Électrons libres dans une naine blanche

$$n = 5 \times 10^{30} \text{ électrons par } \mathrm{cm}^3 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_f^{e^-,\text{nb}} \simeq 0.36 \text{ MeV}$$

- Énergie de masse d'un électron

Quelques valeurs numériques

- Air (gaz parfait) à $T = 0°$ C

$$n = 3 \times 10^{19} \text{ molécules par } \mathrm{cm}^3$$

- Électrons libres dans un conducteur

$$n = 5 \times 10^{22} \text{ électrons par } \mathrm{cm}^3 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_f^{e^-,\text{sol}} \simeq 5 \text{ eV}$$

- Électrons libres dans une naine blanche

$$n = 5 \times 10^{30} \text{ électrons par } \mathrm{cm}^3 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_f^{e^-,\text{nb}} \simeq 0.36 \text{ MeV}$$

- Énergie de masse d'un électron

$$E_m = m_e c^2 = 0.51 \mathrm{MeV}$$

Entropie à $T = 0$

$$S_0 = k \ln(1) = 0 \quad \text{Nerst...}$$

Entropie à $T = 0$

$$S_0 = k \ln(1) = 0 \quad \text{Nerst...}$$

Énergie interne à $T = 0$

$$U_0 = \sum_i n_i \varepsilon_i \longrightarrow \int \varepsilon \, g\left(\varepsilon\right) \Theta \left(\varepsilon - \varepsilon_f\right) d\varepsilon = \frac{4}{5} g_s \pi \frac{V}{h^3} \left(2m\right)^{3/2} \varepsilon_f^{5/2}$$

soit

$$U_0 = \frac{3}{5} N \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V} \right)^{2/3} = N\overline{\varepsilon} \ \text{ avec } \overline{\varepsilon} = \frac{3}{5} \, \varepsilon_f$$

Entropie à $T = 0$

$$S_0 = k \ln(1) = 0 \quad \text{Nerst...}$$

Énergie interne à $T = 0$

$$U_0 = \sum_i n_i \varepsilon_i \longrightarrow \int \varepsilon \, g\left(\varepsilon\right) \Theta\left(\varepsilon - \varepsilon_f\right) d\varepsilon = \frac{4}{5} g_s \pi \frac{V}{h^3} \left(2m\right)^{3/2} \varepsilon_f^{5/2}$$

soit

$$U_0 = \frac{3}{5} N \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} = N\overline{\varepsilon} \ \text{ avec } \overline{\varepsilon} = \frac{3}{5} \, \varepsilon_f$$

Énergie libre à $T = 0$

$$F_0 = U_0 = \frac{3N}{5} \, \varepsilon_f$$

Entropie à $T = 0$

$$S_0 = k \ln(1) = 0 \quad \text{Nerst...}$$

Énergie interne à $T = 0$

$$U_0 = \sum_i n_i \varepsilon_i \longrightarrow \int \varepsilon \, g\left(\varepsilon\right) \Theta\left(\varepsilon - \varepsilon_f\right) d\varepsilon = \frac{4}{5} g_s \pi \frac{V}{h^3} \left(2m\right)^{3/2} \varepsilon_f^{5/2}$$

soit

$$U_0 = \frac{3}{5} N \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} = N\overline{\varepsilon} \;\; \text{avec } \overline{\varepsilon} = \frac{3}{5}\, \varepsilon_f$$

Énergie libre à $T = 0$

$$F_0 = U_0 = \frac{3N}{5}\, \varepsilon_f$$

Pression à $T = 0$

$$P_0 = \frac{2N\varepsilon_f}{5V} = \frac{2}{3} \frac{U_0}{V}$$

Entropie à $T=0$

$$S_0 = k\ln(1) = 0 \quad \text{Nerst...}$$

Énergie interne à $T=0$

$$U_0 = \sum_i n_i\varepsilon_i \longrightarrow \int \varepsilon\, g\left(\varepsilon\right)\Theta\left(\varepsilon - \varepsilon_f\right) d\varepsilon = \frac{4}{5} g_s \pi \frac{V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2}\varepsilon_f^{5/2}$$

soit

$$U_0 = \frac{3}{5} N \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} = N\overline{\varepsilon} \text{ avec } \overline{\varepsilon} = \frac{3}{5}\,\varepsilon_f$$

Énergie libre à $T=0$

$$F_0 = U_0 = \frac{3N}{5}\,\varepsilon_f$$

Pression à $T=0$

$$P_0 = \frac{2N\varepsilon_f}{5V} = \frac{2}{3}\frac{U_0}{V}$$

Pour une naine blanche $P_0 \simeq 2,3\times 10^{22}\ \mathrm{Pa}$ $\simeq$ Pression gravitationnelle ...

Escapades à températures non nulles

Escapades à températures non nulles

On a vu que $\mu\left(T=0\right)=\varepsilon_f$ ainsi

$$\chi=\exp\left(\beta\mu\right)\rightarrow+\infty \text{ si } \beta\rightarrow+\infty \text{ i.e. } T\rightarrow 0$$

Escapades à températures non nulles

On a vu que $\mu\left(T=0\right)=\varepsilon_f$ ainsi

$$\chi=\exp\left(\beta\mu\right)\longrightarrow+\infty \text{ si } \beta\longrightarrow+\infty \text{ i.e. } T\longrightarrow 0$$

Il serait donc souhaitable d'obtenir un DL de $h\left(\chi\right)$ pour $\chi\longrightarrow+\infty$.

Escapades à températures non nulles

On a vu que $\mu(T=0) = \varepsilon_f$ ainsi

$$\chi = \exp(\beta\mu) \longrightarrow +\infty \text{ si } \beta \longrightarrow +\infty \text{ i.e. } T \longrightarrow 0$$

Il serait donc souhaitable d'obtenir un DL de $h(\chi)$ pour $\chi \longrightarrow +\infty$.

$$\boxed{h(\chi) = +\frac{2g_s}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \ln\left[1 + \exp(\chi - x)\right] dx}$$

A. Sommerfeld$^{(1868-1951)}$

Escapades à températures non nulles

On a vu que $\mu(T=0)=\varepsilon_f$ ainsi

$$\chi=\exp(\beta\mu)\rightarrow+\infty \text{ si } \beta\rightarrow+\infty \text{ i.e. } T\rightarrow 0$$

Il serait donc souhaitable d'obtenir un DL de $h(\chi)$ pour $\chi\rightarrow+\infty$.

A. Sommerfeld$^{(1868-1951)}$

$$\boxed{h(\chi)=+\frac{2g_s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\ln\left[1+\exp(\chi-x)\right]dx}$$

Si $\chi\rightarrow+\infty$, $\quad h(\chi)=g_s\dfrac{8\chi^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\left[1+\dfrac{5\pi^2}{8}\chi^{-2}+o\left(\chi^{-3}\right)\right]$

Escapades à températures non nulles

On a vu que $\mu(T=0)=\varepsilon_f$ ainsi

$$\chi = \exp(\beta\mu) \to +\infty \text{ si } \beta \to +\infty \text{ i.e. } T \to 0$$

Il serait donc souhaitable d'obtenir un DL de $h(\chi)$ pour $\chi \to +\infty$.

A. Sommerfeld$^{(1868-1951)}$

$$\boxed{h(\chi) = +\frac{2g_s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\ln\left[1+\exp(\chi-x)\right]dx}$$

Si $\chi \to +\infty$,

$$h(\chi) = g_s\frac{8\chi^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\chi^{-2}+o\left(\chi^{-3}\right)\right]$$

$$h'(\chi) = g_s\frac{4\chi^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\chi^{-2}+o\left(\chi^{-3}\right)\right]$$

Escapades à températures non nulles

On a vu que $\mu(T=0)=\varepsilon_f$ ainsi

$$\chi=\exp(\beta\mu)\rightarrow+\infty \text{ si } \beta\rightarrow+\infty \text{ i.e. } T\rightarrow 0$$

Il serait donc souhaitable d'obtenir un DL de $h(\chi)$ pour $\chi\rightarrow+\infty$.

A. Sommerfeld$^{(1868-1951)}$

$$\boxed{h(\chi)=+\frac{2g_s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\ln\left[1+\exp(\chi-x)\right]dx}$$

Si $\chi\rightarrow+\infty$,

$$h(\chi)=g_s\frac{8\chi^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\chi^{-2}+o\left(\chi^{-3}\right)\right]$$

$$h'(\chi)=g_s\frac{4\chi^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\chi^{-2}+o\left(\chi^{-3}\right)\right]$$

$$h''(\chi)=g_s\frac{2\chi^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{\pi^2}{24}\chi^{-2}+o\left(\chi^{-3}\right)\right]$$

Calcul de μ (en fait χ) pour $\chi \to +\infty$

$$N = Zh'(\chi) = Zg_s \frac{4\chi^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\chi^{-2} + o\left(\chi^{-3}\right)\right]$$

Calcul de μ (en fait χ) pour $\chi \to +\infty$

$$N = Zh'(\chi) = Zg_s \frac{4\chi^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\chi^{-2} + o\left(\chi^{-3}\right) \right]$$

au premier ordre on obtient $\left(Z = \frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \right)$

$$\beta\chi = \left(\frac{3N}{4\pi g_s V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} = \varepsilon_f \qquad \text{MIRACLE !}$$

Calcul de μ (en fait χ) pour $\chi \rightarrow +\infty$

$$N = Zh'(\chi) = Zg_s \frac{4\chi^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\chi^{-2} + o\left(\chi^{-3}\right) \right]$$

au premier ordre on obtient $\left(Z = \frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \right)$

$$\beta\chi = \left(\frac{3N}{4\pi g_s V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} = \varepsilon_f \qquad \text{MIRACLE !}$$

Ainsi

si $\chi \rightarrow +\infty$ alors $\chi \rightarrow \beta\varepsilon_f = \dfrac{\varepsilon_f}{kT}$

Calcul de μ (en fait χ) pour $\chi \to +\infty$

$$N = Zh'(\chi) = Zg_s \frac{4\chi^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\chi^{-2} + o\left(\chi^{-3}\right)\right]$$

au premier ordre on obtient $\left(Z = \frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\right)$

$$\beta\chi = \left(\frac{3N}{4\pi g_s V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} \; = \; \varepsilon_f \qquad \text{MIRACLE !}$$

Ainsi

si $\chi \to +\infty$ alors $\chi \to \beta\varepsilon_f = \frac{\varepsilon_f}{kT}$

plus précisément

$$\chi = \beta\mu = \frac{\varepsilon_f}{kT}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_f}\right)^2 + o\left(T^3\right)\right]$$

Finalement avec $x_f = \frac{kT}{\varepsilon_f}$ et $\varepsilon_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$

Finalement avec $x_f = \frac{kT}{\varepsilon_f}$ et $\varepsilon_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$

$$F = F_0 \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} x_f^2 + o\left(x_f^2\right)\right] \qquad\qquad F_0 = \frac{3}{5} N \varepsilon_F$$

Finalement avec $x_f = \frac{kT}{\varepsilon_f}$ et $\varepsilon_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$

$$F = F_0 \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} x_f^2 + o\left(x_f^2\right)\right] \qquad F_0 = \frac{3}{5} N \varepsilon_F$$

$$S = \frac{\pi^2}{2} N k \left[x_f + o\left(x_f\right)\right] \qquad S_0 = 0$$

Finalement avec $x_f = \frac{kT}{\varepsilon_f}$ et $\varepsilon_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$

$$F = F_0 \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} x_f^2 + o\left(x_f^2\right)\right] \qquad F_0 = \frac{3}{5} N \varepsilon_F$$

$$S = \frac{\pi^2}{2} N k \left[x_f + o\left(x_f\right)\right] \qquad S_0 = 0$$

$$P = P_o \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} x_f^2 + o\left(x_f^2\right)\right] \qquad P_0 V = \frac{2}{5} N \varepsilon_f$$

Finalement avec $x_f = \frac{kT}{\varepsilon_f}$ et $\varepsilon_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$

$$F = F_0 \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} x_f^2 + o\left(x_f^2\right)\right] \qquad F_0 = \frac{3}{5} N \varepsilon_F$$

$$S = \frac{\pi^2}{2} N k \left[x_f + o\left(x_f\right)\right] \qquad S_0 = 0$$

$$P = P_o \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} x_f^2 + o\left(x_f^2\right)\right] \qquad P_0 V = \frac{2}{5} N \varepsilon_f$$

$$U = U_0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} x_f^2 + o\left(x_f^2\right)\right] \qquad U_0 = \frac{3}{5} N \varepsilon_f$$

Finalement avec $x_f = \frac{kT}{\varepsilon_f}$ et $\varepsilon_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$

$$F = F_0 \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} x_f^2 + o\left(x_f^2\right)\right] \qquad F_0 = \frac{3}{5} N \varepsilon_F$$

$$S = \frac{\pi^2}{2} N k \left[x_f + o\left(x_f\right)\right] \qquad S_0 = 0$$

$$P = P_o \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} x_f^2 + o\left(x_f^2\right)\right] \qquad P_0 V = \frac{2}{5} N \varepsilon_f$$

$$U = U_0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} x_f^2 + o\left(x_f^2\right)\right] \qquad U_0 = \frac{3}{5} N \varepsilon_f$$

$$C_V = N k \frac{\pi^2}{2} \left[x_f + o\left(x_f\right)\right] \qquad C_{V0} = 0$$

Un résultat à retenir...

Un résultat à retenir...

$\longrightarrow$ Température de Fermi θ_f

$$k\theta_f = \varepsilon_f \quad \Rightarrow \quad \theta_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2km}$$

Un résultat à retenir...

$\longrightarrow$ Température de Fermi θ_f

$$k\theta_f = \varepsilon_f \quad \Rightarrow \quad \theta_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2km}$$

$$\theta_f \simeq \left| \begin{array}{ll} 5 \cdot 10^9 \ \mathrm{K} & \text{électrons d'une naine blanche (alors que } T \simeq 10^7 \ \mathrm{K}) \\ 6 \cdot 10^4 \ \mathrm{K} & \text{électrons libres dans les métaux} \end{array} \right.$$

Un résultat à retenir...

$\longrightarrow$ Température de Fermi θ_f

$$k\theta_f = \varepsilon_f \quad \Rightarrow \quad \theta_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2km}$$

$$\theta_f \simeq \left| \begin{array}{ll} 5 \cdot 10^9 \ \mathrm{K} & \text{électrons d'une naine blanche (alors que } T \simeq 10^7 \ \mathrm{K}) \\ 6 \cdot 10^4 \ \mathrm{K} & \text{électrons libres dans les métaux} \end{array} \right.$$

En général, $x_f \ll 1$,

$\Longrightarrow$ On peut très souvent considérer que les fermions sont à $T = 0$ K.