

1872 - 2022

EQUATION DE BOLTZMANN

150
ANS

ANNIVERSAIRE

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \cdot \nabla_r f - \nabla_r U \cdot \nabla_p f = C(f)$$


1872 - 2022



$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \cdot \nabla_r f - \nabla_r U \cdot \nabla_p f = C(f)$$

- A – La thermodynamique anteboltzmanienne
 - 1. Une approche macroscopique phénoménologique
 - 2. Clausius sur la bonne voie...
 - 3. Maxwell en catalyseur
- B – Alors parut Ludwig Boltzmann
 - 1. Les articles de 1868 et 1872
 - 2. Boltzmann et l'entropie
 - 3. Le petit cadeau de 1884
 - 4. Le début des problèmes
 - 5. Une fin tragique
- C – Le froid aura-t-il raison de l'univers
 - 1. L'histoire ancienne
 - 2. La version moderne

Il y en aura pour tous les goûts, et aussi des compléments en fil noir demain ...

A – La thermodynamique antéboltzmannienne

La thermodynamique* est une science compliquée, généralement peu appréciée des étudiants...



IL VAUT MIEUX POMPER MÊME S'IL NE SE PASSE RIEN QUE RISQUER QU'IL SE PASSE QUELQUE CHOSE DE PIRE EN NE POMPANT PAS.

* théorie mécanique de la chaleur

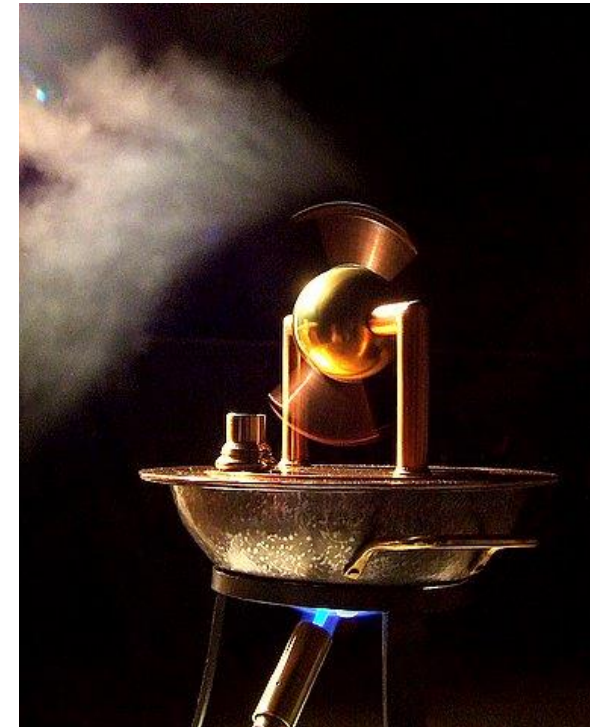
1 - Approche macroscopique phénoménologique

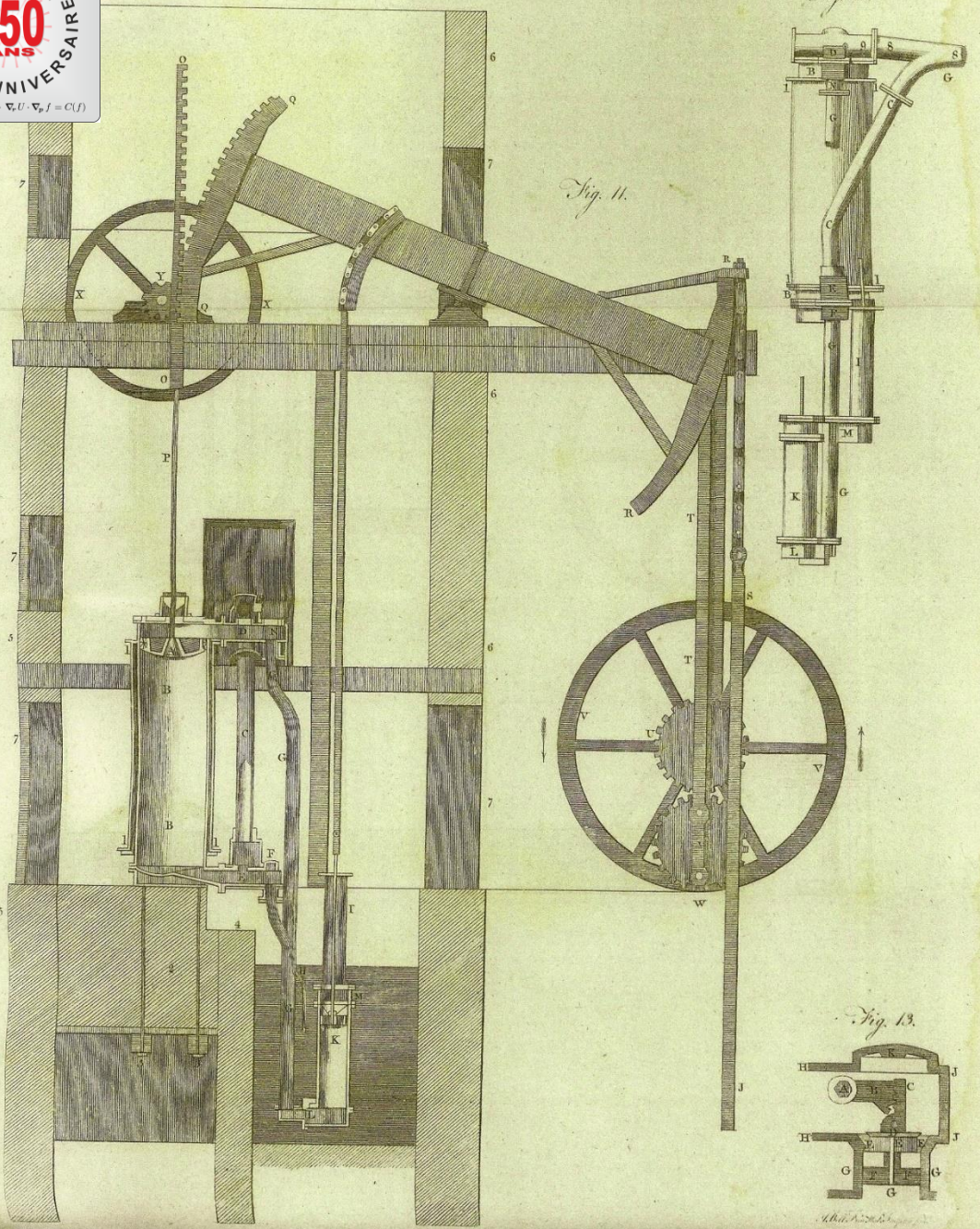


L'éolipyle d'Héron d'Alexandrie (1^e siècle ap. JC)

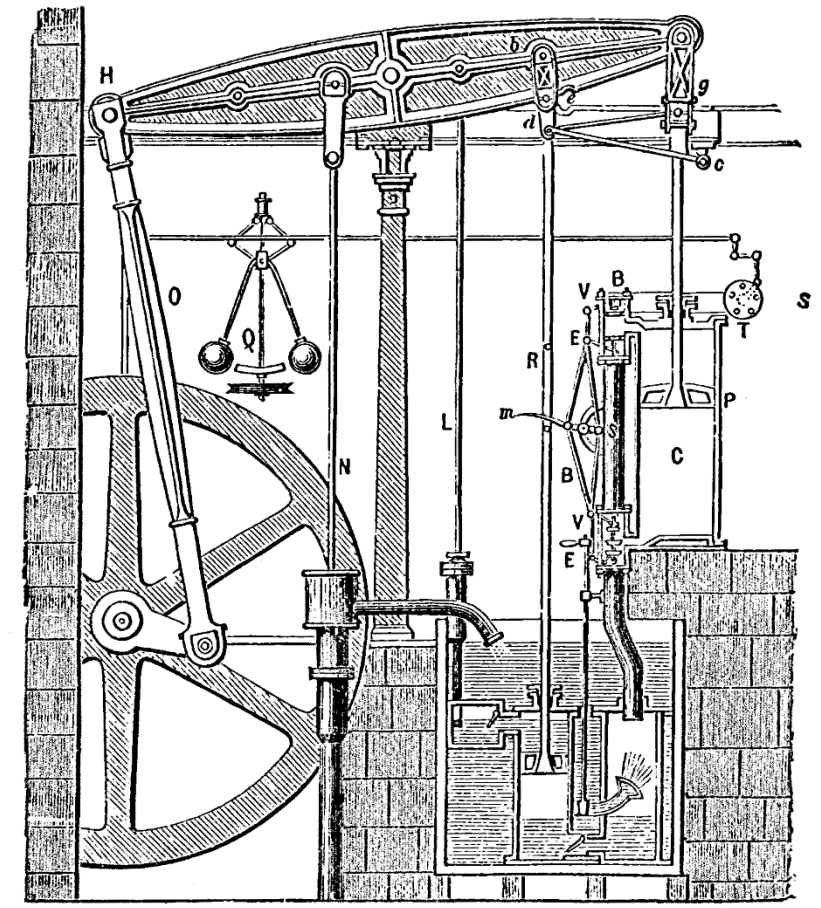
« Machine de salon » dans l'antiquité

Mais on obtient 1500 tr/min avec des combustibles fossiles, des métaux usinés, des joints et des soupapes dans une reconstitution moderne

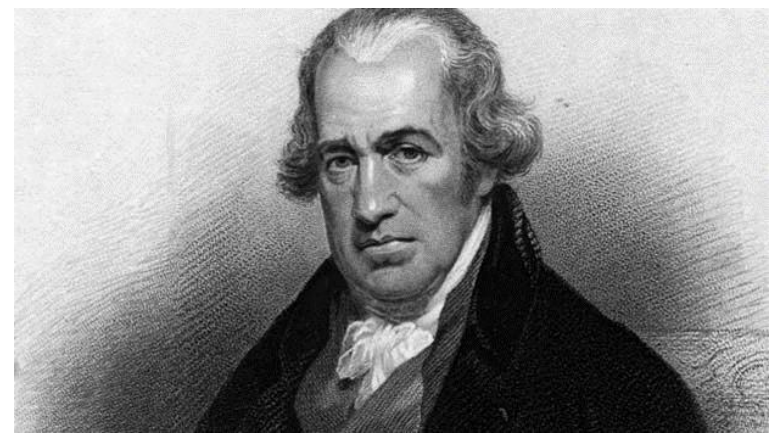


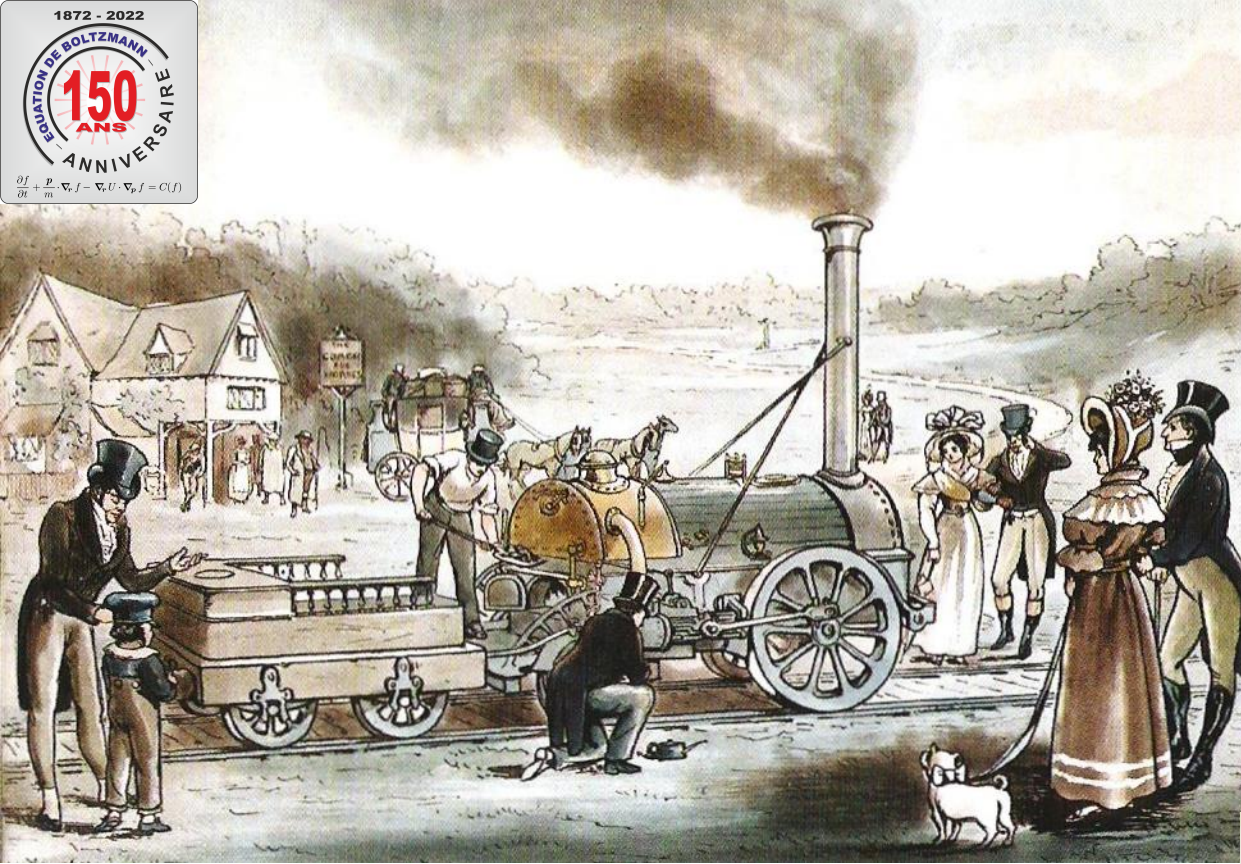


Les moteurs à vapeur



James Watt
1736-1819





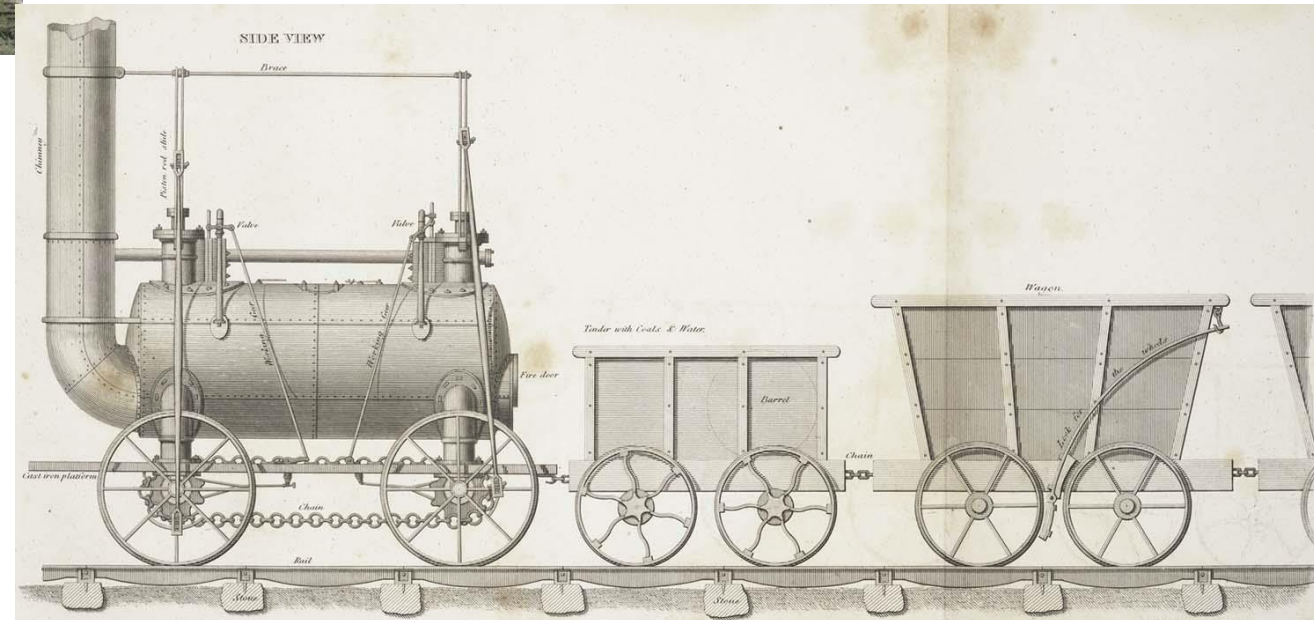
« The Rocket » sur la ligne Liverpool – Manchester - 1830

L'âge d'or de la thermodynamique
et de la mécanique

Les machines
à vapeur



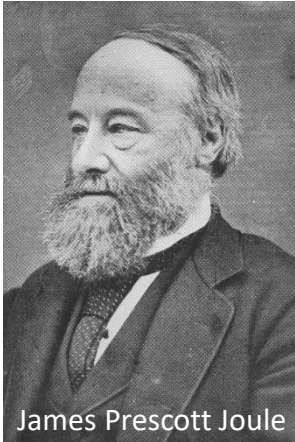
George Stephenson
(1781-1848)





Thermodynamique, une construction lente...

Premier principe : conservation de l'énergie



James Prescott Joule
de 1841 à 1850

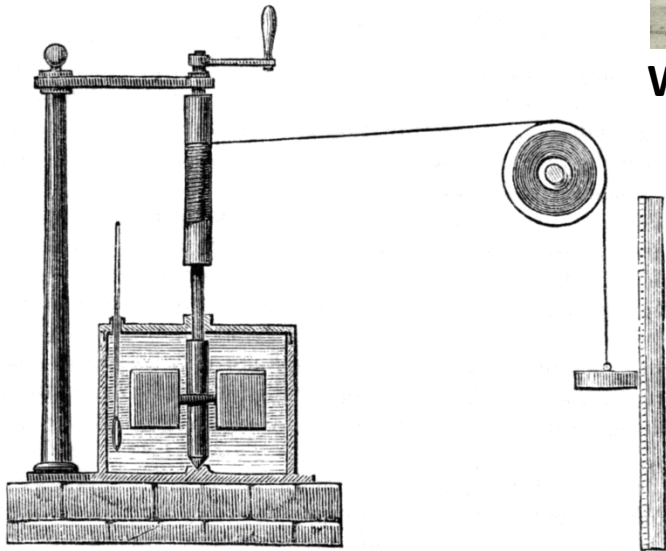
→ **Travail** ↔ **Chaleur**

Mouvement
Macroscopique

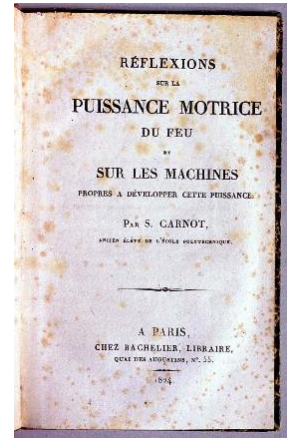
?



W : Force x déplacement
Exprimé en joule



Sadi Carnot, 1824



« On ne peut extraire qu'une quantité limitée de travail d'une source de chaleur »



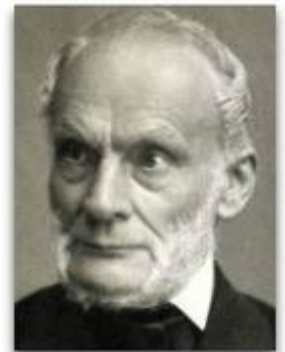
William Thomson
(Lord Kelvin)

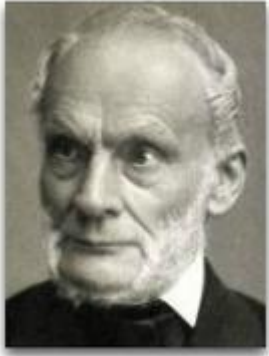
1848 : Définition de la température

Quantité de travail réalisée par un transfert de chaleur

Synthèse provisoire par Rudolf Clausius en 1850

« la chaleur et le travail sont des formes de transfert d'énergie »
« La somme des variations de travail et de chaleur correspondent à la variation d'énergie subie par un système »





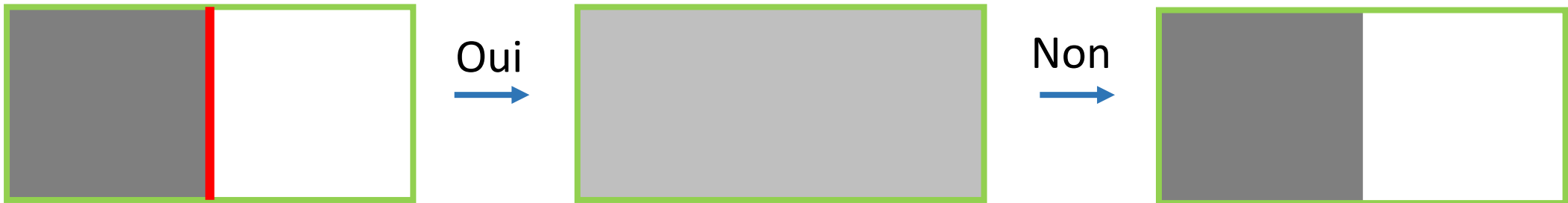
Le travail est un transfert ordonné d'énergie

La chaleur est un transfert désordonné d'énergie :

Si ce transfert désordonné est réversible il est entièrement convertible en travail
Sinon, une partie seulement pourra être « utilisée », l'autre sera dissipée !

Et inattendue ...

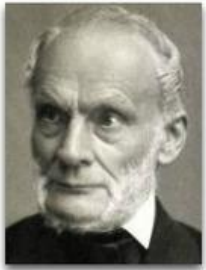
Certaines transformations sont impossible !



Second principe (de Clausius)

*Il existe une grandeur physique caractérisant ces transferts de chaleur appelée entropie.
Lors d'une transformation, l'entropie d'un système isolé ne peut que croître ou rester constante !*

On sait alors modéliser les machines thermiques, mais on y comprend rien !



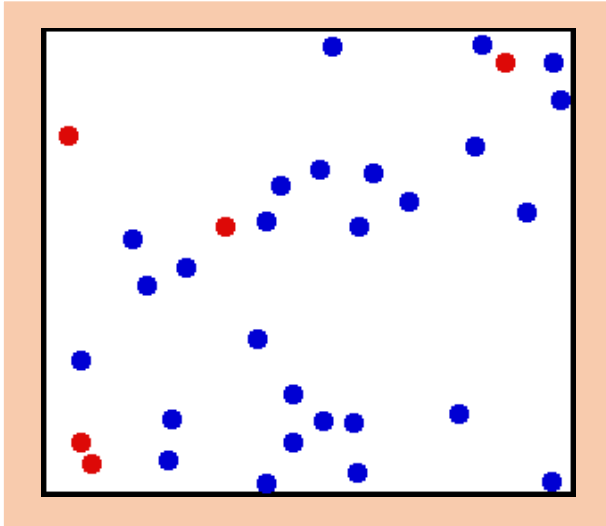
Rudolf Clausius
 (1822-1888)

2 – Clausius sur la bonne voie...

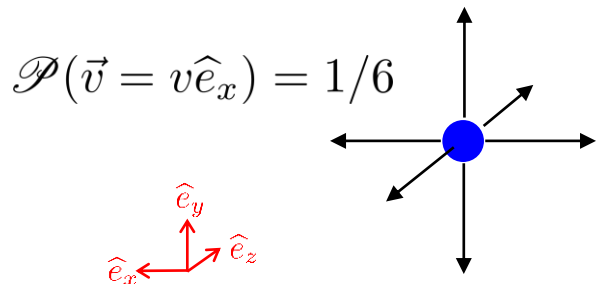
Sur l'espèce de mouvement que nous appelons chaleur, Annalen der Physik, 176 (3) : p.353, 1857

La pression est un échange de quantité de mouvement...
 La température correspond à l'énergie cinétique moyenne

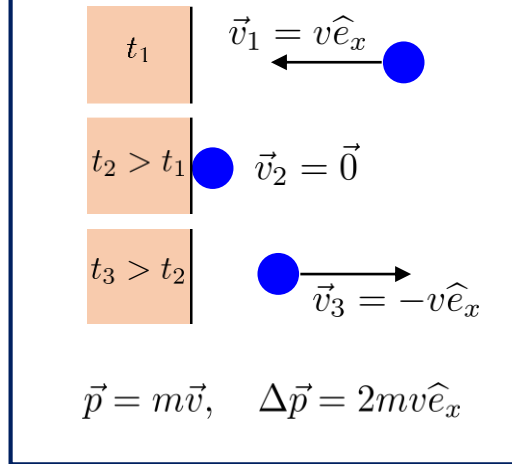
Gaz dans une enceinte



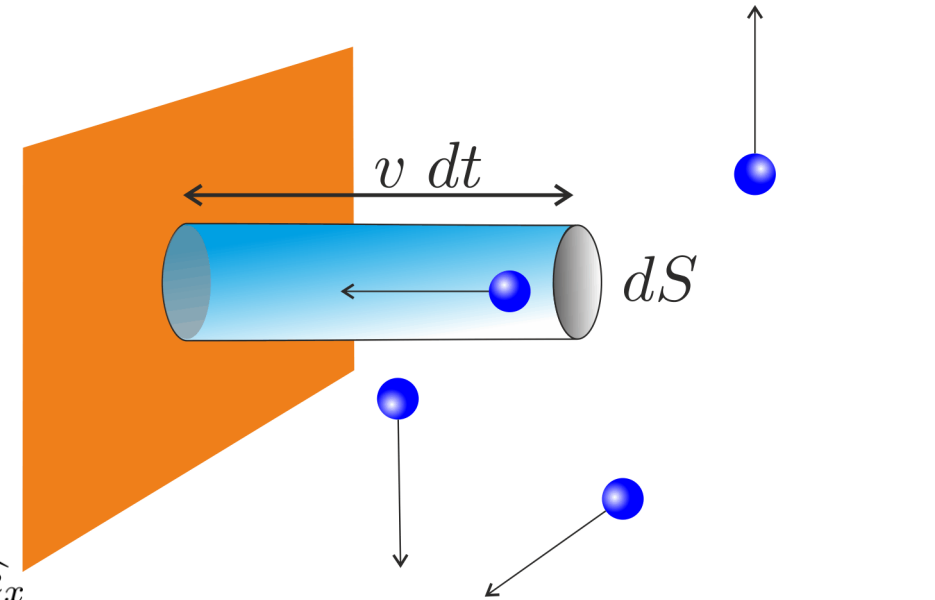
Hydrodynamica
 Bernoulli, 1738



Bilan pour 1 choc



... avec une densité particulaire $n = N/V$



$$d\vec{p} = \frac{1}{6} n dV \times \Delta\vec{p} = \frac{1}{3} nmv^2 dS dt \hat{e}_x$$

La force correspondante est $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{3} nmv^2 dS \hat{e}_x = \frac{mv^2}{3V} dS \hat{e}_x$

Qui correspond à une pression $P = \frac{F}{dS} = \frac{mv^2}{3V} \implies PV = \frac{1}{3} mv^2$

En rajoutant l'équation d'état du gaz on trouve : $PV = \nu RT = \frac{1}{3} mv^2 = \frac{2}{3} E_c$

3 – Maxwell en catalyseur...

Un gaz est constitué de particules en collisions incessantes sous la forme de chocs de sphères dures :

- après chaque choc entre deux sphères le rebond peut survenir avec une probabilité égale dans toutes les directions ;
- une fois la vitesse d'une particule décomposée le long de 3 directions orthogonales, la distribution de probabilité pour chaque composante de la vitesse est indépendante des valeurs des autres composantes (isotropie).

Quelle est la distribution des vitesses des particules dans un gaz ?



James Clerck Maxwell 1831-1879

1860, Illustration of the theory of gases, Phil. mag., Vol. 19, p.19

1867, On the Dynamical Theory of Gases, Phil. Trans. R. A. S., Vol. 157, p. 49

Le nombre de molécules du gaz (à l'équilibre) ayant une vitesse dont la composante selon x est v_x à dv_x près est $dN_x = N\varphi(v_x)dv_x$.

L'isotropie impose que $dN_y = N\varphi(v_y)dv_y$ et $dN_z = N\varphi(v_z)dv_z$ avec la même φ .

L'indépendance impose que le nombre de particules affichant les 3 valeurs en même temps est $d^3N = N^3\varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_xdv_ydv_z$

Du fait de l'isotropie d^3N ne peut dépendre que de $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$$d^3N = N^3\varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_xdv_ydv_z = N^3f(v)dv_xdv_ydv_z$$

Dérivée logarithmique par rapport à v_x ...

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = \frac{f'(v)}{f(v)} \frac{dv}{dv_x} = \frac{f'(v)}{f(v)} \frac{v_x}{v} \implies \frac{1}{v_x} \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = \frac{1}{v} \frac{f'(v)}{f(v)} = \text{cste} = -\frac{2}{\alpha^2}$$

$$\varphi(v_x) = C \exp(-v_x^2/\alpha^2)$$

3 – Maxwell en catalyseur...

On a donc

$$d^3 N = N^3 C^3 \exp(-v^2/\alpha^2) dv_x dv_y dv_z = 4\pi N^3 C^3 v^2 \exp(-v^2/\alpha^2) dv$$

Finalement on sait que

$$N = \int d^3 N \implies dN_v = \frac{4N}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} v^2 \exp(-v^2/\alpha^2) dv = f(v) dv$$

Distribution des vitesses de Maxwell !

Maxwell calcule le module de la vitesse moyenne

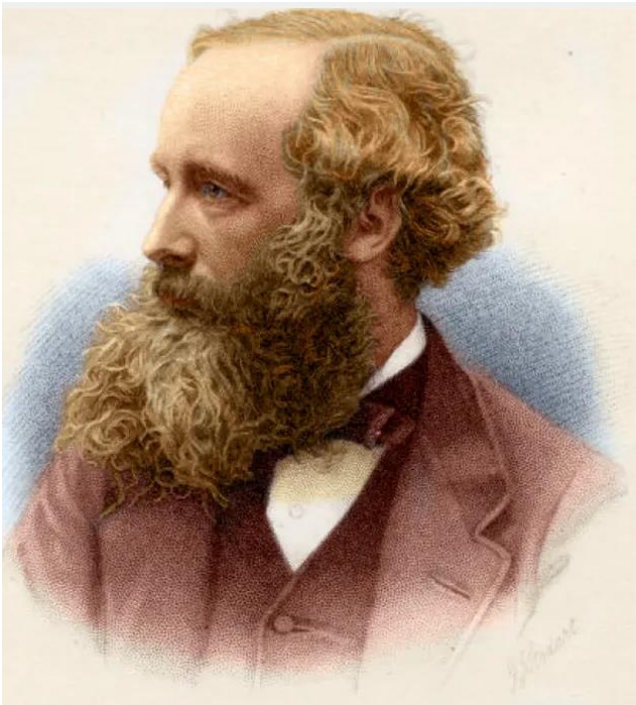
$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \frac{4\pi}{\alpha^3 \pi^{3/2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-v^2/\alpha^2} dv = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$$

Ainsi que la vitesse quadratique moyenne

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{+\infty} v^2 f(v) dv = \frac{4\pi}{\alpha^3 \pi^{3/2}} \int_0^{+\infty} v^4 e^{-v^2/\alpha^2} dv = \frac{3\alpha^2}{2}$$

A Vienne, Joseph Stefan transmet ces résultats à son étudiant Ludwig Boltzmann. Il va les reprendre, les éclairer, les généraliser et les interpréter !

Quelle est la distribution des vitesses des particules dans un gaz ?



James Clerck Maxwell 1831-1879

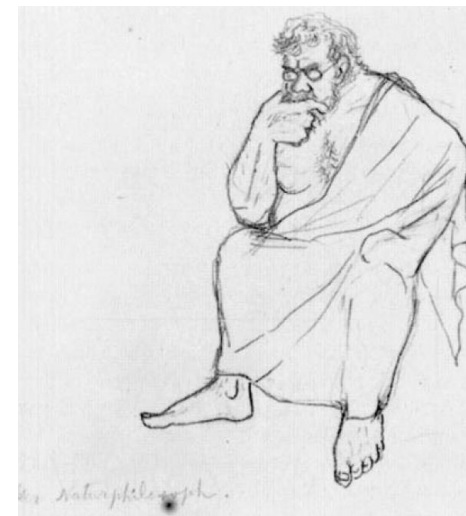
1860, Illustration of the theory of gases, Phil. mag., Vol. 19, p.19

1867, On the Dynamical Theory of Gases, Phil. Trans. R. A. S., Vol. 157, p. 49

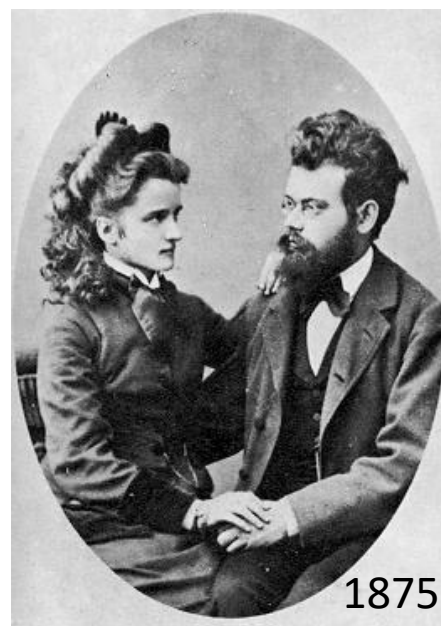
B - Alors parut Ludwig Boltzmann (1844-1906)



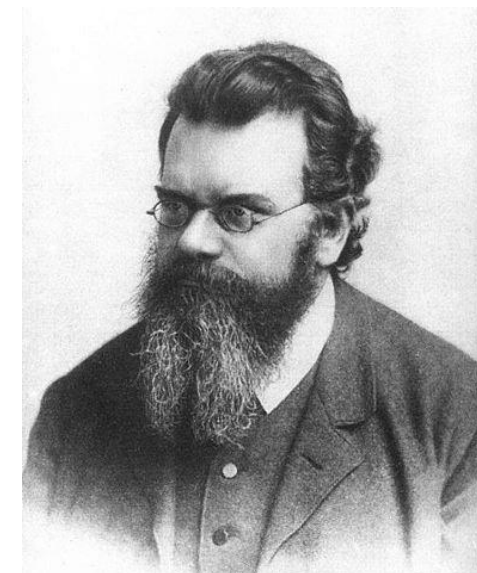
Dessins de K. Prizbram



1868



1875



1902



1 - Les articles de 1868 et 1872

Utilisation d'une description microscopique

La puissance du nombre & la force des probabilités



Ludwig Boltzmann en 1875 à 31 ans

1868 : Etudes préliminaires (sa thèse...)

« Etude sur l'équilibre de la force vive de points matériels en mouvement », Wiener Berichte, Vol.58, 1868, p. 517-560

1872 : Equation de Boltzmann et théorème H

« Etudes complémentaires sur l'équilibre thermique des molécules de gaz », Wiener Berichte, Vol.66, 1872, p. 275-370

La solution de Maxwell est un équilibre de cette EDP

La vitesse n'est pas la bonne variable, il vaut mieux utiliser l'énergie ε de chaque particule

Maxwell $\exp(-v^2/\alpha^2) \rightarrow \exp \left[-h \left(U(\vec{r}) + \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) \right]$ Boltzmann $h \leftrightarrow \frac{1}{kT}$

Force subie $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$
par une particule

$\vec{p} = m\vec{v}$
Impulsion

La distribution des vitesses est une loi marginale de la distribution dans l'espace des phases.

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = f^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t) = f^{(1)}(\Gamma_1, t)$$

$$= \int \dots \int f^{(n)}(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, t) d\Gamma_2 \dots d\Gamma_n$$

Cette distribution marginale est solution d'une EDP

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = C(f) = \frac{f^e - f}{\tau}$$

La fonction $\langle H \rangle(t) = \int f \ln f d\Gamma$ est décroissante !



Démonstration du théorème H

Quelque part dans l'espace des phases : $\Gamma = (\vec{r}, \vec{p})$

Fonction de distribution : $f(\Gamma, t)$ positive et intégrable

Le nombre de particules dans le volume $d\Gamma$ à l'instant t est donné par $f(\Gamma, t)d\Gamma$

Etat d'équilibre : $f^e = f^e(\Gamma)$ par exemple $f^e(\Gamma) = f_0 \exp\left(-\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r})\right)$

On définit la quantité $H = H(\Gamma, t) = \ln f$ et sa valeur pour un équilibre $H^e = \ln f^e$ qui ne dépend donc pas du temps

Sa valeur moyenne sur l'espace des phases est donnée par $\langle H \rangle(t) = \int f H d\Gamma = \int f \ln f d\Gamma$

A l'équilibre cette valeur moyenne est constante : $\langle H^e \rangle = \int f \ln f^e d\Gamma$ vérifie $\frac{d\langle H^e \rangle}{dt} = \int \frac{df}{dt} \ln f^e d\Gamma = 0$

C'est une conséquence des équations de Hamilton...

Il ne reste plus qu'à calculer ...

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int f \ln f d\Gamma = \int \left(\frac{df}{dt} \ln f + f \frac{\frac{df}{dt}}{f} \right) d\Gamma = \int \frac{df}{dt} (1 + \ln f) d\Gamma$$

$$= \int \frac{df}{dt} \ln (f/f^e) d\Gamma$$

Le nombre de particules est constant : $N = \int f d\Gamma = \text{cste} \implies \frac{dN}{dt} = 0 = \int \frac{df}{dt} d\Gamma$



Démonstration du théorème H

Quelque part dans l'espace des phases : $\Gamma = (\vec{r}, \vec{p})$

Fonction de distribution : $f(\Gamma, t)$ positive et intégrable

Le nombre de particules dans le volume $d\Gamma$ à l'instant t est donné par $f(\Gamma, t)d\Gamma$

Etat d'équilibre : $f^e = f^e(\Gamma)$ par exemple $f^e(\Gamma) = f_0 \exp\left(-\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r})\right)$

On définit la quantité $H = H(\Gamma, t) = \ln f$ et sa valeur pour un équilibre $H^e = \ln f^e$ qui ne dépend donc pas du temps

Sa valeur moyenne sur l'espace des phases est donnée par $\langle H \rangle(t) = \int f H d\Gamma = \int f \ln f d\Gamma$

A l'équilibre cette valeur moyenne est constante : $\langle H^e \rangle = \int f \ln f^e d\Gamma$ vérifie $\frac{d\langle H^e \rangle}{dt} = \int \frac{df}{dt} \ln f^e d\Gamma = 0$

C'est une conséquence des équations de Hamilton...

On trouve donc $\frac{d\langle H \rangle}{dt} = \int \frac{df}{dt} \ln(f/f^e) d\Gamma$

L'équation de Boltzmann s'écrit $\frac{df}{dt} = \frac{f^e - f}{\tau}$ donc $\frac{d\langle H \rangle}{dt} = \int \frac{f^e}{\tau} (1 - f/f^e) \ln(f/f^e) d\Gamma$

Or la fonction $x \mapsto (1 - x) \ln x$ est négative pour tout $x > 0$ et ne s'annule qu'en $x = 1$

Conclusion

$\langle H \rangle(t)$ est décroissante

Elle atteint un minimum à l'équilibre

2 – Boltzmann et l'entropie

Utilisation d'une description microscopique
La puissance du nombre & la force des probabilités



Ludwig Boltzmann en 1875 à 31 ans
 1877 : Paradoxe de la réversibilité et $S = k \ln W$

« Sur le rapport entre le second principe de la théorie mécanique de la chaleur et la théorie des probabilités en relation avec les lois de l'équilibre thermique »,
 Wiener Berichte, Vol.76, 1877, p. 373-435.

Travail

Mouvement

Macroscopique



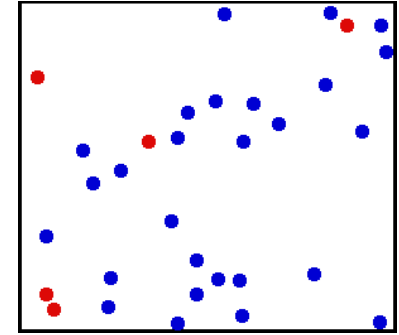
W : Force x déplacement
en joule



Chaleur

Mouvement

Microscopique



Q : Energie cinétique
en joule

L'entropie permet d'estimer la quantité d'information perdue quand on résume l'information microscopique par l'information macroscopique.

Elle augmente avec la capacité d'un système à être désordonné.

L'entropie est une fonction du nombre de façons d'obtenir le même état macroscopique avec des répartitions microscopiques différentes

Ordre/désordre : avec Boltzmann c'est la fin des privilèges...

Chaque état d'un système possède la même probabilité de se produire mais les états ordonnés sont généralement beaucoup moins nombreux que les autres.



**Jeu de 5 cartes
 (non magiques)**

1 seul état « ordonné »

Nombre d'états possibles

Il y a en tout $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ordres différents
 soit 125 possibilités

1^{ère} carte : 5 possibilités

2^{ème} carte : la première a été choisie, il reste donc 4 possibilités

3^{ème} carte : les deux premières ont été choisies, il reste donc 3 possibilités

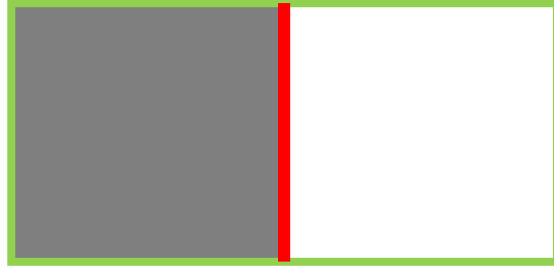
4^{ème} carte : les trois premières ont été choisies, il reste donc 2 possibilités

Dernière carte : il n'en reste plus qu'une !

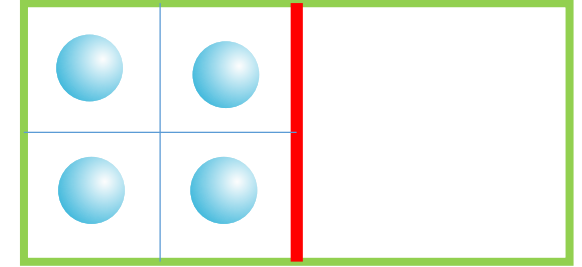
Si les tirages sont équiprobables « l'état ordonné » n'est qu'un parmi les 125 possibles !

Quand Boltzmann explique la détente de Joule !

En fait

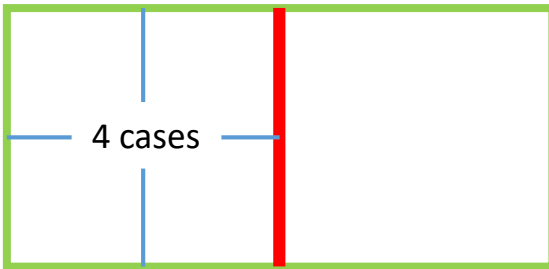


est la représentation macroscopique de



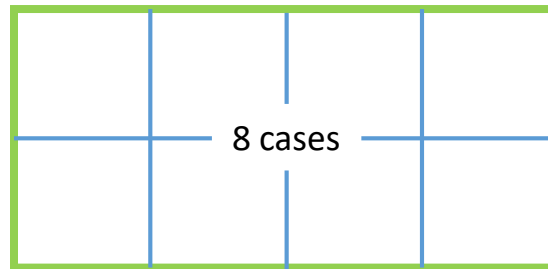
Lorsqu'on enlève la paroi on augmente le nombre de possibilités ...

Avant détente : répartir 4  dans



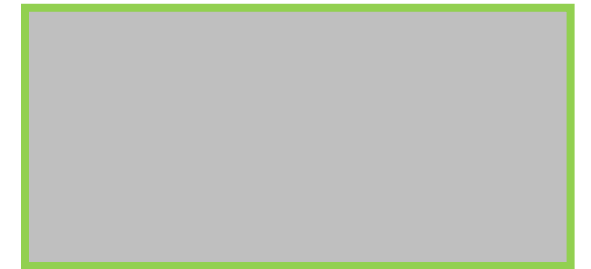
1 possibilité ...

Après détente : répartir 4  dans



1680 possibilités ... (8x7x6x5)

Représentation macroscopique
d'une possibilité « normale »



En fait, dans 1 cm³ d'air il y a en moyenne
1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 molécules

Une fois la paroi enlevée, la probabilité que toutes les particules se retrouvent à nouveau toutes à gauche de l'enceinte est plus qu'infime !

Le processus est statistiquement irréversible , l'entropie est démasquée !

Si les microétats sont équiprobables
leur nombre est $W \sim 1/f$

Attendu que $H = f \ln f$ est une fonction décroissante

La fonction $S \sim \ln W$ est croissante...
on peut l'interpréter comme l'entropie !

La notation S pour l'entropie avait été introduite
par Clausius dans son article de 1865 en hommage à Sadi Carnot.

W est la première lettre de « *Wahrscheinlichkeit* »
qui signifie probabilité en allemand...

Cette notation est introduite par un étudiant de Boltzmann,
Max Planck, dans son fameux papier de 1900, papier
lui-même inspiré de l'article de 1872...

La lettre k est aussi introduite par Planck qui écrit pour la première
fois la formule de Boltzmann.

On ne commencera à parler de constante de Boltzmann que dans
les années 1920 lorsque l'on comprit son importance...

Ce n'est qu'en 1933 que cette formule sera écrite sur sa tombe ...

L'entropie est démasquée !



Pierre tombale de la sépulture de Ludwig Boltzmann dans le cimetière central de Vienne



Joseph Stefan
 1835-1893

3 – Le petit cadeau de 1884...

En 1879, Joseph Stefan trouve une relation empirique entre la puissance rayonnée par un corps chauffé et sa température...

5 ans plus tard son étudiant, démontre cette relation à partir de concepts thermodynamiques...



Ludwig Boltzmann en 1884 à 40 ans

Maxwell, en utilisant ses équations, avait établi la relation pour la pression de radiation...

Elle s'écrit $P = \frac{1}{3}u$ où $u = U/V$ est la densité volumique d'énergie.

La conservation de l'énergie donne $dU = TdS - PdV$ que l'on écrit

$$TdS = d(uV) + \frac{1}{3}udV = Vdu + \frac{4}{3}udV$$

Si $u = u(T)$ on peut écrire

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3T} u dV \implies S = S(V, T) \text{ avec } \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \text{ et } \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4}{3T} u$$

On utilise alors le théorème de Schwartz pour avoir

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = -\frac{4}{3T^2} u + \frac{4}{3T} \frac{du}{dT} \text{ qui donne } \frac{du}{dT} = \frac{4}{T} u \implies u \propto T^4$$

L'expression de la constante de proportionnalité $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$ sera établie dans les années 1920.

4 – Le début des problèmes...

L'hypothèse atomique

Ernst Mach
(1838-1916)



Wilhelm Ostwald
(1853-1932)



Les énergétistes

« La supposition atomique n'est pas un recours possible ! »
... ni simple , ni sensible ...

Mise en évidence de l'électron (Perrin, Thomson, 1895 → 97)
hypothèse du photon (Einstein 1905),
puis du noyau atomique (Rutherford, 1911)



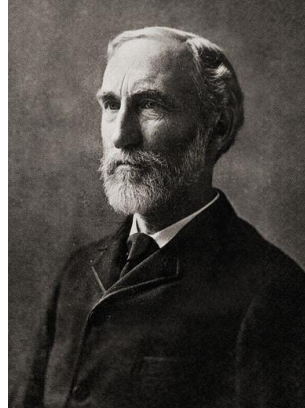
Des soucis avec les mathématiciens...

« avec l'hypothèse des particules,
 l'entropie **doit** être une fonction périodique »

Ernst Zermelo
 (1871 -1953)



Josiah Willard Gibbs
 (1839 -1903)



« En étudiant Clausius on semble faire de la mécanique,
 en lisant Maxwell et Boltzmann on fait des probabilités »



« Si le monde est composé d'un nombre fini d'éléments,
 et si le temps qui lui est alloué est infini, il repassera une infinité de fois par le même état »

L'éternel retour



Henri Poincaré
 (1854 -1912)



Friedrich Nietzsche
 (1844 -1900)

Le paradoxe de Loschmidt (1876)

Johann Josef Loschmidt
(1821-1895)



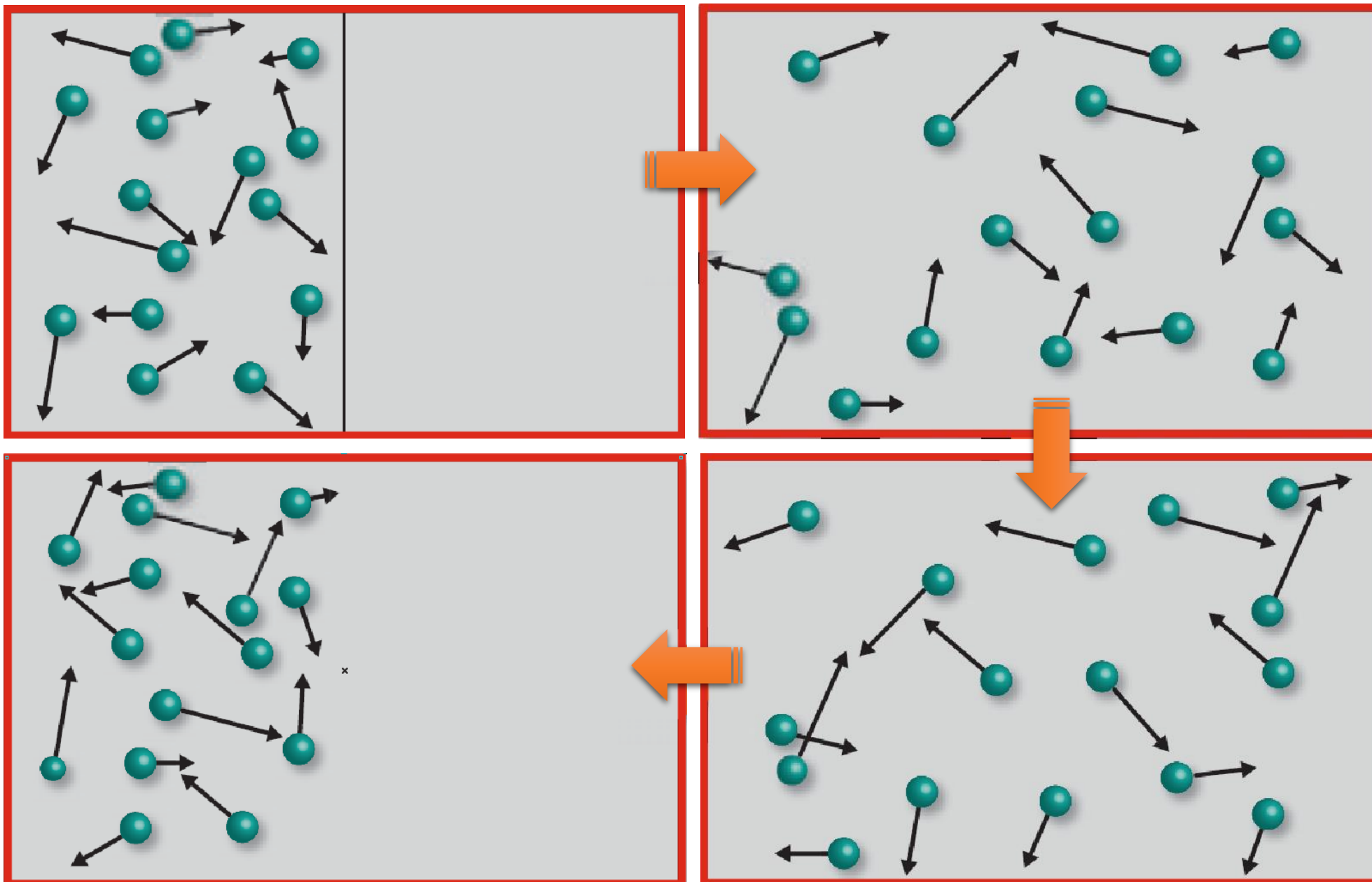
« si l'on renverse le sens du temps dans l'évolution dynamique des particules à un instant $t > 0$, elles devraient revenir à l'endroit d'où elles sont parties à l'instant $t=0$, et donc faire croître H . »

Réponse de Boltzmann

« Allez-y, renversez les ! »



Le paradoxe de Loschmidt



Difficile à faire
Expérimentalement !

Echo de spin...
retournement temporel

Le paradoxe de Loschmidt (1876)

Johann Josef Loschmidt
(1821-1895)



« si l'on renverse le sens du temps dans l'évolution dynamique des particules à un instant $t > 0$, elles devraient revenir à l'endroit d'où elles sont parties à l'instant $t=0$, et donc faire croître H . »

Réponse de Boltzmann

« Allez-y, renversez les ! »



La véritable raison de l'opposition de Loschmidt...

« Le zèle ardent avec lequel Loschmidt s'occupa de sauver l'univers de la mort thermique par dissipation de l'énergie dont celui-ci était menacé par les prescriptions de Clausius et de Lord Kelvin correspondait entièrement à son tempérament idéaliste.

Il ne réussit pas ce sauvetage, à supposer que celui-ci fût vraiment nécessaire. »

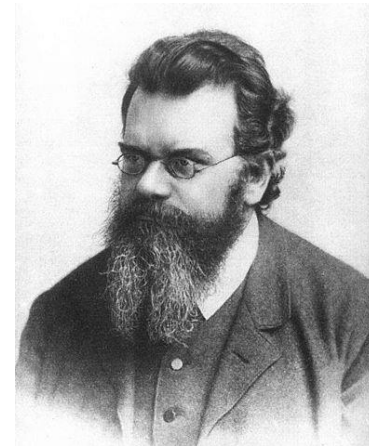
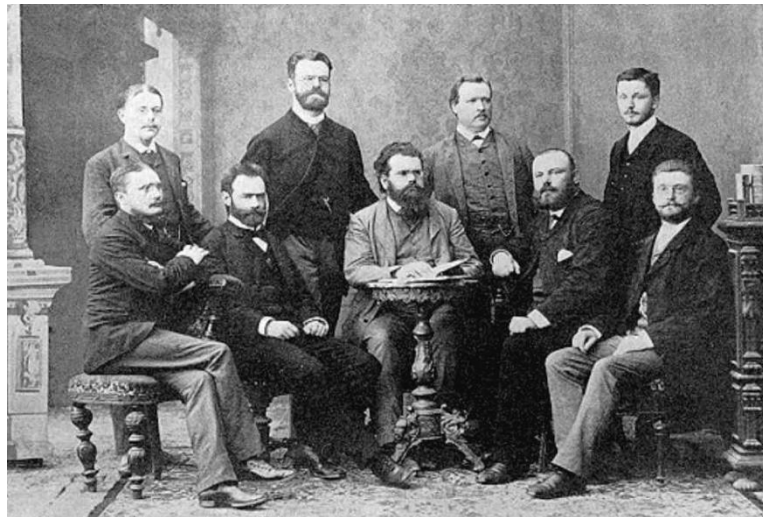
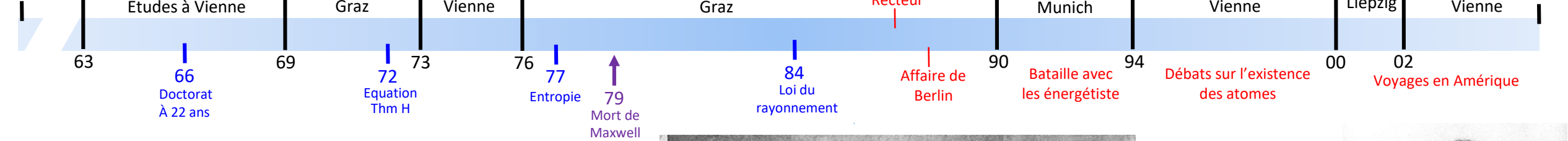
Eloge funèbre de Loschmidt lu devant l'Académie des sciences de Vienne le 29 octobre 1895 par Ludwig Boltzmann

5 – Une fin tragique



Naissance à Vienne

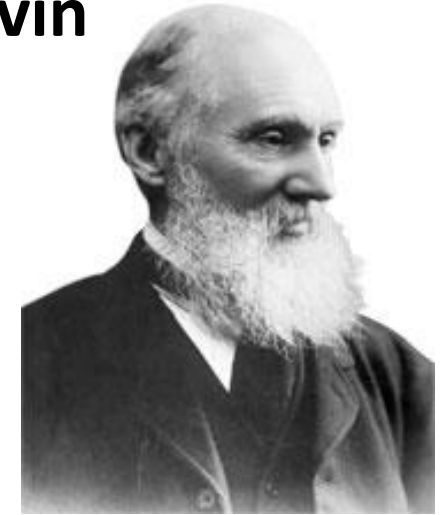
1844



C – Histoire (mort) thermique de l'univers



Encore une idée de Lord Kelvin



« La chaleur n'est pas une substance, mais une forme dynamique d'effet mécanique. Nous percevons qu'il doit y avoir une équivalence entre le travail et la chaleur, comme entre la cause et l'effet »

"On the Dynamical Theory of Heat", Philosophical Magazine IV. 1852

**Le principe de non décroissance de l'entropie implique que les transferts (travail \Leftrightarrow chaleur) ne peuvent être parfaits
 C'est la notion de rendement introduite par Carnot**

« Le mouvement mécanique et l'énergie utilisée pour créer ce mouvement tendront à se dissiper ou à s'affaiblir, naturellement »

"On a Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy", Mathematical and Physical Papers, volume 1, art. 59, page 511, 1852

Il s'implique alors dans le débat sur l'âge du Soleil et de la Terre

Si le Soleil transforme toute son énergie potentielle **gravitationnelle** en chaleur

... il fonctionne pendant 50 millions d'années au maximum !

10^{26} Watt = 10^{26} Joules par seconde, l'énergie potentielle d'une sphère (homogène) est $E_p = \frac{2}{5} \frac{GM^2}{R}$ soit $3,5 \cdot 10^{41}$ J pour le soleil

Si on convertit toute cette énergie en chaleur qui est rayonnée on peut donc tenir (au rythme actuel) $T = \frac{1,4 \cdot 10^{41}}{10^{26}} = 1,4 \cdot 10^{15}$ s

Comme un an compte environ 31 millions de secondes ($1\text{an} = 3,1 \cdot 10^7$ s), on obtient $T = \frac{1,4 \cdot 10^{15}}{3,1 \cdot 10^7} = 44$ millions d'années.

« Si l'univers est fini et contraint d'obéir aux lois existantes...

... Le résultat serait inévitablement un état de repos et de mort universelle »

"On the age of the Sun's heat", Macmillan's Mag., 5, 288-93; PL, 1, 394-68, 1868

A dying universe: the long-term fate and evolution of astrophysical objects

Fred C. Adams* and Gregory Laughlin†

Physics Department, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan 48109



La version moderne

This paper outlines astrophysical issues related to the long-term fate of the universe. The authors consider the evolution of planets, stars, stellar populations, galaxies, and the universe itself over time scales that greatly exceed the current age of the universe. Their discussion starts with new stellar evolution calculations which follow the future evolution of the low-mass (M -type) stars that dominate the stellar mass function. They derive scaling relations that describe how the range of stellar masses and lifetimes depends on forthcoming increases in metallicity. They then proceed to determine the ultimate mass distribution of stellar remnants, i.e., the neutron stars, white dwarfs, and brown dwarfs remaining at the end of stellar evolution; this aggregate of remnants defines the “final stellar mass function.” At times exceeding ~ 1 – 10 trillion years, the supply of interstellar gas will be exhausted, yet star formation will continue at a highly attenuated level via collisions between brown dwarfs. This process tails off as the galaxy gradually depletes its stars by ejecting the majority and driving a minority toward eventual accretion onto massive black holes. As the galaxy disperses, stellar remnants provide a mechanism for converting the halo dark matter into radiative energy. Posited weakly interacting massive particles are accreted by white dwarfs, where they subsequently annihilate with each other. Thermalization of the decay products keeps the old white dwarfs much warmer than they would otherwise be. After accounting for the destruction of the galaxy, the authors consider the fate of the expelled degenerate objects (planets, white dwarfs, and neutron stars) within the explicit assumption that proton decay is a viable process. The evolution and eventual sublimation of these objects is dictated by the decay of their constituent nucleons, and this evolutionary scenario is developed in some detail. After white dwarfs and neutron stars have disappeared, galactic black holes slowly lose their mass as they emit Hawking radiation. This review finishes with an evaluation of cosmological issues that arise in connection with the long-term evolution of the universe. Special attention is devoted to the relation between future density fluctuations and the prospects for continued large-scale expansion. The authors compute the evolution of the background radiation fields of the universe. After several trillion years, the current cosmic microwave background will have redshifted into insignificance; the dominant contribution to the radiation background will arise from other sources, including stars, dark-matter annihilation, proton decay, and black holes. Finally, the authors consider the dramatic possible effects of a nonzero vacuum energy density. [S0034-6861(97)00202-X]

Voir aussi la conférence d’Alain Riazuelo
 L’univers aux limites de l’éternité
 Festival Astronomie Fleurance 2013



$$\eta = \log \left(\frac{\tau}{1 \text{ an}} \right)$$

	η	Ère
Big-bang	$-\infty$	Radiative
Ere de Planck	-50,3	
Ere de grande unification	-44,5	
Phase de transition électrofaible	-17,5	
Quarks confinés dans les hadrons	-12,5	
Nucléosynthèse primordiale	-6	
Domination de la matière	4	
Recombinaison	5,5	
Formation des premières étoiles	6	
Formation de notre galaxie	9	
Formation du système solaire	9,5	
Maintenant	10	
Le soleil devient une naine blanche	10,2	
Collision Andromède/Voie lactée	10,2	
Age minimal pour un Big Crunch	10,8	
Fin ZAMS pour les étoiles légères	13	
Fin de la formation stellaire	14	

	η	Ère
Les planètes se libèrent des étoiles	15	Dégénérée
Formation * par collision de NB	16	
Age minimal pour un Big Rip	18	
Les étoiles se libèrent des galaxies	19	
Fin des planètes par ray. grav. Orbital	20	
Annihilation des WIMPS dans les halos	22,5	
Formation * par accrétion / naines brunes	23	
Fin des étoiles par ray. grav. orbital	24	
Les naines blanches ont absorbé les WIMPS	25	
Les trous noirs ont absorbé les * galactiques	30	
Idem pour les * des amas galactiques	33	Noire
Désintégration des protons $p^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$	37	
Fin des planètes, naines brunes, blanches, EN	39	
Evaporation des trous noirs stellaires	65	
Evaporation des trous noirs supermassifs	83	Ps
Formation positronium	89	
Tout le positronium à disparu en photons	150	

Merci pour votre attention !



Des compléments et des démonstrations dans le fil noir demain...