Potentiel et densité

1 Mise en route

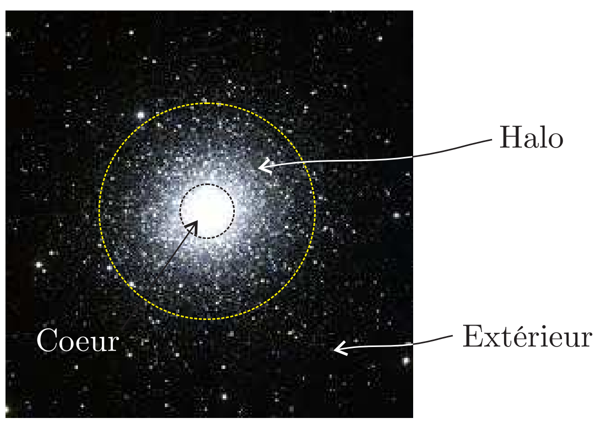
Déterminer le potentiel gravitationnel à l'intérieur et à l'extérieur d'une boule homogène de rayon R et de masse volumique $\rho = cste$.

2 Potentiel dans un amas globulaire

Les amas globulaires sont des objets constitués d'une dizaine à quelques centaines de milliers d'étoiles. Ils possèdent la symétrie sphérique. La répartition volumique de leur masse peut être approchée par une distribution de la forme

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 = cste & \text{si } r < r_0 \qquad \text{cœur} \\ \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{\alpha} \rho_0 & \text{si } r_0 < r < R \qquad \text{halo} \\ 0 & \text{si } r > R \qquad \text{extérieur} \end{cases}$$

Le paramètre α caractérise le degré d'évolution de l'amas : lorsqu'il est jeune $\alpha = 4$ puis lors de l'évolution de l'amas $\alpha \to 2$, ρ_0 et $R \to \infty$



1. Déterminer le potentiel d'un jeune amas.

2. Vers quelle valeur la masse de l'amas semble évoluer ?

3 Le potentiel képlérien jaugé

On considère le mouvement d'une étoile dans le potentiel de champ moyen d'une galaxie de la forme

$$\psi = -GM\left(u + au^2\right) \qquad (1)$$

avec $u = 1/r$ inverse de la distance de l'étoile au centre galactique, et a un paramètre réel strictement négatif. Le terme en u^2 a été nommé jauge dans un travail remarquable...

1. Indiquer pourquoi le mouvement de l'étoile s'effectue dans un plan.

2. Quelles sont les grandeurs conservées lors du mouvement ?

3. Calculer la densité associée au potentiel (1), en déduire que a est nécéssairement négatif. Interpréter $|a|$ sachant que la masse de la galaxie est M.

4. Montrer que si l'on impose $\dot{r}(0) = 0$, l'équation polaire du mouvement s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \alpha p \cos(K\theta)} \quad \text{avec } p = \frac{\Lambda^2 K^2}{\mu} \text{ et } K = 1 + \frac{2|a|\mu}{\Lambda^2} > 0$$

   où α est une constante d'intégration arbitraire. Déterminer l'expression du demi-grand axe jaugé $a_j = \frac{r_{\min}+r_{\max}}{2}$. Dessinez quelques orbites.

5. Montrer que l'énergie massique s'écrit

$$\xi = -\alpha \frac{\mu}{2a_j} \qquad \text{avec } a_j = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$$

   Question subsidiaire : Déterminer la période de la fonction $r(t)$ et vérifier qu'elle ne dépend que de ξ et pas de Λ.