ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ [1]

Entrer dans l'action.

1) Déterminer la formule générale donnant la période T et le déphasage Θ du périastre du mouvement dans un potentiel central.

2) Montrer que ces deux relations se déduisent des dérivées partielles de l'action radiale

$$A = \int_{r_p}^{r_a} \sqrt{2\left(\xi - \psi\right) - \frac{\Lambda^2}{r^2}} dr$$

3) Déterminer l'action radiale dans le cas keplerien et harmonique. En déduire T et le déphasage Θ pour ces potentiels.

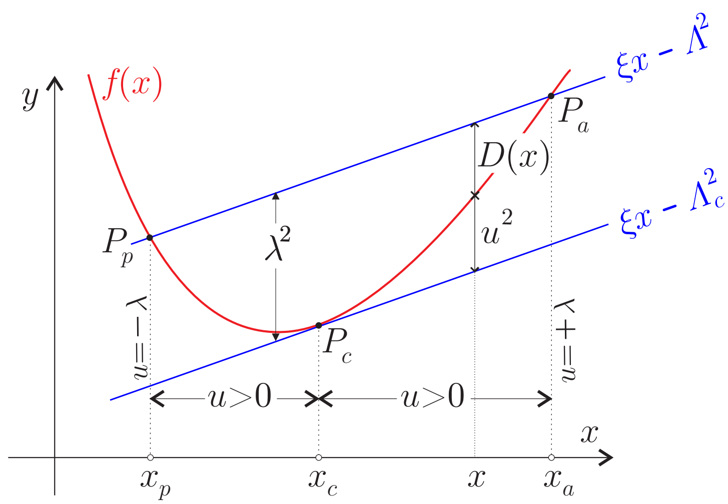
4) Déterminer sans trop de calculs la période dans le potentiel keplerien jaugé d'un TD précédent $\psi\left(r\right) = -\frac{\mu}{r} + \frac{a}{r^2}$.

L'art des paraboles

1) On pose $x = 2r^2$ et $f\left(x\right) = x\psi\left(x\right)$ montrer que la période d'un mouvement central s'écrit sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_a} \frac{dx}{\sqrt{D\left(x\right)}}$$

où $D\left(x\right)$ représente la distance verticale entre le graphe de la fonction $y = f\left(x\right)$ et la droite d'équation $y = \xi x - \Lambda^2$.



2) Sur la figure ci-dessus, on pose $\sin\varphi = \frac{u(x)}{\lambda}$ et $F\left(u\right) = \frac{dx}{du}$ montrer que la période se récrit

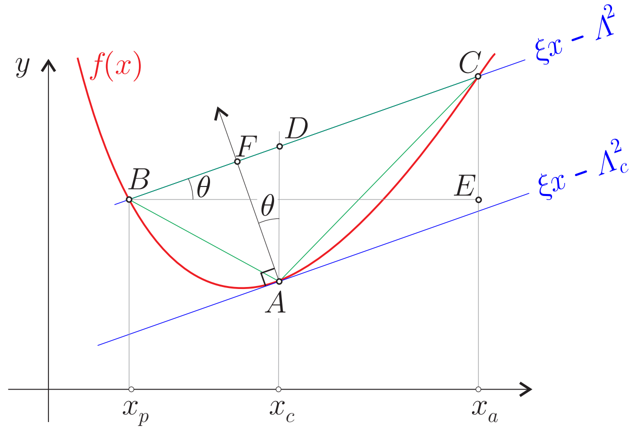
$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F\left(\lambda \sin\varphi\right) d\varphi$$

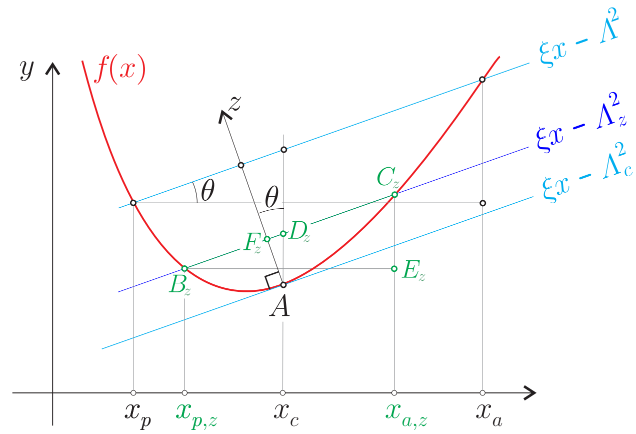
3) En écrivant le développement en série entière la fonction $F\left(u\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ montrer que T ne dépend pas de ξ si et seulement si F est une fonction impaire de u. En déduire que la période s'écrit dans ce cas

$$T^2 = \frac{\pi^2}{16} \frac{\left(x_a - x_p\right)^2}{\Lambda_c^2 - \Lambda^2}$$

[1] Nul n'entre ici s'il n'est géomètre !

4) On considère à présent les figures ci-dessous





Calculer l'aire $\mathcal{T}$ du triangle ABC.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la corde BC et le graphe de la fonction $y = f(x)$. On pourra faire une intégrale à la Lebesgue $\mathcal{A} = \int_0^{AF} B_z C_z dz$: voir partie gauche de la figure ci-dessus.

On rappelle la caractérisation des paraboles par Archimède.

Théorème : Une courbe plane est une parabole si et seulement si l'aire sous une corde quelconque de cette courbe est quatre tiers de l'aire du triangle formé par cette corde et le point C où la tangente à la courbe est parallèle à la corde.

Conclure !