Autour des potentiels logarithmiques

Première partie : Propriétés générales

On souhaite étudier les propriétés physiques d'un système autogravitant tridimensionel dont le potentiel de champ moyen est donné par la relation $\tilde{\psi}(r) = \psi_0 + \psi_1 \ln\left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$ où $\psi_0 < 0$ et $\psi_1 > 0$ sont des constantes homogènes à des potentiels gravitationnels, et $r_0 > 0$ homogène à une longueur. La coordonnée r est la distance au centre du système.

1. Déterminer l'expression de la densité volumique de masse $\rho(r)$ de ce système. Représenter l'allure de la densité dans le plan $(\ln r, \ln \rho)$. Commenter cette courbe.

2. Déterminer l'expression du profil de masse radiale $M(r)$, c'est-à-dire la masse contenue dans ce système à l'intérieur d'une sphère de rayon r. Commentez ce profil.

3. Déterminer l'expression du profil de vitesse circulaire $v_c(r)$, c'est-à-dire le module de la vitesse qu'aurait une particule de masse m évoluant dans ce système sur une orbite circulaire de rayon r. Commentez ce profil, on pourra rapprocher le modèle avec certaines observations.

Seconde partie : Potentiel logarithmique tournant

On se place dans le référentiel cartésien $R = (O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ et on considère un système en rotation autour de l'axe fixe $(O, \hat{e}_z)$ à la vitesse $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z$ où Ω est une constante positive. Un point M de masse m de ce système est repéré dans la base cartésienne par le vecteur $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$. On suppose que le potentiel gravitationnel de champ moyen ψ au point M est tel que $\psi = \psi(x, y)$. A l'instant $t = 0$, origine des temps, les vecteurs position $\vec{r}$ et vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ de M sont dans le plan $\Pi_{xy} = (O, \hat{e}_x, \hat{e}_y)$. On admet que le lagrangien de M s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\vec{v} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right)^2 - m\psi \tag{1}$$

4. Montrer que le mouvement de M s'effectue dans Π_{xy} et déterminer les équations différentielles vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$. On fera apparaître en fin de calcul un potentiel effectif de la forme $\psi_e(x, y) = \psi(x, y) - \frac{\Omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

Pour modéliser les barres que l'on observe dans certaines galaxies spirales on utilise souvent un potentiel de la forme

$$\psi(x, y) = \Omega^2 a^2 \ln\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]$$

où a et b sont deux constantes positives homogènes à des longueurs telles que $a > b$.

5. *En utilisant l'une des loi découverte empiriquement par un astronome allemand dans la première partie du* XVII^e *siècle*, justifier l'homogénéité de la dimension du facteur $\Omega^2 a^2$.

6. Déterminer les coordonnées des 5 positions d'équilibres possibles pour M. Les deux points tels que $x \neq 0$ seront notés E_1 et E_2, les deux points tels que $y \neq 0$ seront notés E_4 et E_5 et le dernier sera noté E_3. Comment appele-t-on ces points ?

Pour étudier la stabilité locale de ces points, on remplace dans les équations de la dynamique, le potentiel effectif par sont développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de chacun de ces points.

7. Montrer que le terme de dérivées croisées $\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x \partial y}$ est nul en chacun des points d'équilibre.

8. Pour chaque équilibre $E_k\left(x_k, y_k\right)$ on pose $\xi_k = x - x_k$ et $\mu_k = y - y_k$, $\alpha = \left.\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x^2}\right|_{x_k, y_k}$ et $\beta = \left.\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial y^2}\right|_{x_k, y_k}$ et l'on cherche des solutions des équations du mouvement de la forme $\xi_k = X_k e^{\lambda t}$ et $\mu_k = Y_k e^{\lambda t}$. Montrer que l'existence de solutions non triviales conduite à la résolution d'une équation bicarée de la forme $\lambda^4 + A\lambda^2 + B = 0$ où l'on exprimera la constante A en fonction de Ω, α, et β et la constante B en fonction de α, et β.

Afin d'éviter des calculs inutiles on donne la solution de l'équation bicarée de la question précédente pour chacun des points d'équilibre

Equilibre	Solution
E_1 et E_2	$\lambda_{\pm}^2 = \frac{\Omega^2}{2b^2}\left(-a^2 - 2b^2 \pm a\sqrt{8b^2 + a^2}\right)$
E_3	$\lambda_{\pm}^2 = \frac{\Omega^2}{b^2}\left(-a^2 - 2b^2 \pm \sqrt{5b^4 + 2a^2b^2 + a^4}\right)$
E_4 et E_5	$\lambda_{\pm}^2 = \frac{\Omega^2}{2a^2}\left(-a^2 - 2b^2 \pm a\sqrt{16b^2 - 7a^2}\right)$

9. On se place dans le cas d'un potentiel faiblement axisymétrique pour lequel on a $b = a\sqrt{1 - e^2}$ avec $e \ll 1$. Etudier la stabilité de chacun des points d'équilibre. Comment peut s'interpréter ce résultat si l'on admet que ce potentiel peut modéliser une certaine région d'un certain type de galaxie spirales.

Troisième partie : Résonances dans un potentiel logarithmique tournant

10. On considère une particule test décrite par le lagrangien (1) évoluant dans un potentiel de la forme $\psi = \psi\left(r, \theta\right)$. Les coordonnées $r\left(t\right)$ et $\theta\left(t\right)$ sont les coordonnées polaires dans le plan orbital de cette particule. Montrer qu'elles vérifient les équations différentielles suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} \ddot{r} - r\left(\dot{\theta} + \Omega\right)^2 & = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}\left[r^2\left(\dot{\theta} + \Omega\right)\right] & = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{array}\right. \tag{2}$$

11. On fait les hypothèses suivantes : $\psi\left(r, \theta\right) = \psi_0\left(r\right) + \varepsilon\psi_1\left(r, \theta\right)$, $r\left(t\right) = r_0 + \varepsilon r_1\left(t\right)$ et $\theta\left(t\right) = \theta_0\left(t\right) + \varepsilon\theta_1\left(t\right)$ avec $\varepsilon \ll 1$. En déduire les 4 équations issues de la linéarisation du système (2). En utilsant l'une de ces 4 équations, on montrera que la quantité $J_0 = r_0^2\left(\dot{\theta}_0 + \Omega\right)$ est constante; on posera par la suite $\Omega_0 = \frac{J_0}{r_0^2}$.

12. On suppose que $\theta_0\left(0\right) = \theta_i = 0$. On se place dans le cas d'un potentiel perturbé à variables séparées de la forme $\psi_1\left(r, \theta\right) = \psi_b\left(r\right)\cos\left(n\theta\right)$. On rappelle qu'à l'ordre 1, un développement de Taylor donne $\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \left.\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0}$. Déterminer l'expression de $r_0^2\dot{\theta}_1$ en fonction du temps et des autres paramètres du problème. En déduire une analyse permettant de statuer sur les propriétés de la fonction $r_1\left(t\right)$ et donc de la stabilité de l'orbite.