Potentiel et densité

1 Mise en route

On écrit l'équation de Poisson en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right) = 4\pi G\rho$$

Dans la région extérieure la densité est nulle, le second membre de l'équation est donc nul. Il s'agit d'une EDO linéaire d'ordre 2 : la connaissance de deux solutions linéairement indépendantes suffit pour caractériser l'ensembles des solutions. Ces deux solution sont triviales $\psi_{e,1}(r) = 1$ et $\psi_{e,2}(r) = 1/r$. La solution générale à l'extérieur s'écrit donc

$$\psi_e(r) = a + \frac{b}{r} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes d'intégration à déterminer.}$$

A l'interieur de la sphère un second membre apparait dans l'équation qui reste linéaire. On peut, soit utiliser la méthode de variation de la constante, soit chercher directement une solution particulière. Cette deuxième méthode semble directe en voyant que la fonction $\psi_s(r) = \psi_0 r^2$ est solution, en effet

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi_s}{dr}\right) = \psi_0\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(2r^3\right) = 6\psi_0 = 4\pi G\rho_0 \text{ ssi } \psi_0 = \frac{2}{3}\pi G\rho_0$$

La solution à l'intérieur de la boule est donc

$$\psi_i(r) = c + \frac{d}{r} + \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2 \quad \text{où } c \text{ et } d \text{ sont des constantes d'intégration à déterminer.}$$

On définit maintenant les conditions de raccordement du système :

- La force qui s'applique en un point situé au centre du système est nulle par symétrie. Cette force est $\nabla\psi|_{r=0} = \nabla\psi_i|_{r=0}$ le fait qu'elle s'annule fixe $d = 0$.
- Un potentiel est défini à une constante additive près qui fixe l'origine des potentiels. Prenons donc $a = 0$ en fixant l'origine des potentiels à l'infini. On dit que le système est isolé.
- La fonction $f(r) = \frac{d\psi}{dr}$ représente l'intensité de la force à la disttance r du centre du système : On impose que cette fonction soit continue en $r = R$ laissant ainsi la possibilité à une particule dans le système de potentiellement s'échapper de la boule . La fonction $\psi(r)$ est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a donc
$$\begin{cases} \frac{b}{R} = c + \frac{2}{3}\pi G\rho_0 R^2 \\ -\frac{b}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho_0 R \end{cases} \implies \begin{cases} c = -2\pi G\rho_0 R^2 \\ b = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 R^3 \end{cases}$$

Soit finalement en écrivant aussi les expression en fonction de la masse contenue dans la boule $M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho_0$

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{2\pi G\rho_0 R^2}{3}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3\right] = \frac{GM}{2R}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3\right] & \text{si } r < R \\ -\frac{4\pi G\rho_0 R^3}{3r} = -\frac{GM}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

2 Potentiel dans un amas globulaire

Les amas globulaires sont des objets constitués d'une dizaine à quelques centaines de milliers d'étoiles. Ils possèdent la symétrie sphérique. La répartition volumique de leur masse peut être approchée par une distribution de la forme

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 = cste & \text{si } r < r_0 & \text{cœur} \\ \left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha \rho_0 & \text{si } r_0 < r < R & \text{halo} \\ 0 & \text{si } r > R & \text{extérieur} \end{cases}$$

Le paramètre α caractérise le degré d'évolution de l'amas : lorsqu'il est jeune $\alpha = 4$ puis lors de l'évolution de l'amas $\alpha \to 2$, ρ_0 et $R \to \infty$

1. On résoud Poisson sur les 3 morceaux, dans le morceau intermédaire la solution particulière est de la forme $\psi_h(r) = \frac{k}{r^2}$, pour trouver k on remplace

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi_h}{dr}\right) = 4\pi G\rho_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \implies k = 2\pi G\rho_0 r_0^4$$

On a donc

$$\psi = \begin{cases} c + \frac{d}{r} + \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2 & \text{si } r < r_0 & \text{cœur} \\ a + \frac{b}{r} + 2\pi G\rho_0 r_0^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 & \text{si } r_0 < r < R & \text{halo} \\ e + \frac{f}{r} & \text{si } r > R & \text{extérieur} \end{cases}$$

La constante d est nulle (singularité en 0), e peut être choisie nulle comme origine des potentiels en $r \to +\infty$. Il ne reste plus que

$$\psi = \begin{cases} \psi(r) & \psi(r) & & \\ c + \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2 & \frac{4}{3}\pi G\rho_0 r & \text{si } r < r_0 & \text{cœur} \\ a + \frac{b}{r} + 2\pi G\rho_0 r_0^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 & -\frac{b}{r^2} - 4\pi G\rho_0 r_0^4\left(\frac{1}{r^3}\right) & \text{si } r_0 < r < R & \text{halo} \\ \frac{f}{r} & -\frac{f}{r^2} & \text{si } r > R & \text{extérieur} \end{cases}$$

La continuité de la dérivée en $r = r_0$ donne la constante b

$$b = -\frac{16}{3}\pi G\rho_0 r_0^3 = -4GM_0 \quad \text{avec } M_0 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3$$

La continuité de la dérivée en $r = R$ donne alors f

$$f = -GM_0\left(4 - \frac{3r_0}{R}\right)$$

La continuité du potentiel en $r = R$ donne

$$a = \frac{GM_0}{R}\left(8 - \frac{3r_0}{R}\right) - \frac{3}{2}\frac{GM_0}{r_0}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2$$

enfin la continuité du potentiel en $r = r_0$ donne

$$c = \frac{GM_0}{R}\left(8 - \frac{3r_0}{R}\right) + \frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right)$$

finalement on trouve donc

$$\psi = \begin{cases} \frac{GM_0}{R}\left(8 - \frac{3r_0}{R}\right) + \frac{GM}{r_0}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] & \text{si } r < r_0 & \text{cœur} \\ \frac{GM_0}{R}\left(8 - \frac{3r_0}{R}\right) - \frac{3}{2}\frac{GM_0}{r_0}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 - \frac{4GM_0}{r} + \frac{3GM_0}{2r_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 & \text{si } r_0 < r < R & \text{halo} \\ -\frac{GM_0}{r}\left(4 - \frac{3r_0}{R}\right) & \text{si } r > R & \text{extérieur} \end{cases}$$

si je ne me suis pas trompé dans les calculs...

2. La densité est en r^{-2} de $r = 0$ jusqu'à $r \to +\infty$, la masse de l'amas devient donc singulière en 0 et en $+\infty$.

3 Mouvement d'une étoile dans un potentiel pseudo-képlérien

On considère le mouvement d'une étoile dans le potentiel de champ moyen d'une galaxie de la forme

$$4\pi G\rho\left(r\right) = -GM\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{1}{r}+\frac{a}{r^2}\right)\right]\right) \tag{1}$$

avec $u = 1/r$ inverse de la distance de l'étoile au centre galactique, et a un paramètre réel strictement négatif.

1. Potentiel radial $\Longrightarrow$ Mouvement plan.
2. Le moment cinétique et l'énergie totale sont conservées.
3. On utilise Poisson
$$4\pi G\rho\left(r\right) = -GM\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{1}{r}+\frac{a}{r^2}\right)\right]\right)$$
le terme en $\frac{1}{r}$ ne donne pas de densité ailleurs qu'en $r = 0$, il vient
$$\rho\left(r\right) = -\frac{Ma}{4\pi r^4}$$
Le paramètre a est bien négatif car une densité est positive.
Cette densité est singulière en $r = 0$, calculons la masse de $r = \varepsilon$ à r
$$M\left(r\right) = \int_{\varepsilon}^{r} 4\pi s^2\rho\left(s\right)ds = M\left|a\right|\int_{\varepsilon}^{r}\frac{ds}{s^2} = M\left|a\right|\left[-\frac{1}{s}\right]_{\varepsilon}^{r} = M\left|a\right|\left[\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{r}\right] \to \frac{M\left|a\right|}{\varepsilon} \text{ quand } r \to +\infty.$$
Si l'on veut attribuer une masse finie à cette galaxie, elle sera égale à M si ε est la taille d'une étoile (par exemple).
4. L'équation du mouvement est $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\nabla\psi$, $\vec{r}$ reste dans le plan orbital, en polaire dans ce plan il vient $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$ et donc
$$\left\{\begin{array}{c}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{d\psi}{dr}\\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial\psi}{\partial r}\\ \Lambda = r^2\dot{\theta} = cste\end{array}\right.$$
on pose $u = 1/r$ et on introduit $\Lambda = \dot{\theta}/u^2$ dans l'équation du haut, on note que
$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \Lambda u^2\frac{dr}{d\theta} = -\Lambda u^2\left(\frac{1}{u}\right)' = -u'\Lambda$$
qui donne
$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \dot{\theta}\left(-u'\Lambda\right)' = -\Lambda^2u^2u''$$

l'équation différentielle polaire du mouvement est donc

$$-\Lambda^2 u^2 u'' - \Lambda^2 u^3 = +u^2 \frac{d\psi}{du} = -\mu u^2 (1 + 2au)$$

soit si $u \neq 0$

$$u'' + \left(1 + \frac{2|a|\mu}{\Lambda^2}\right) u = \frac{\mu}{\Lambda^2}$$

Cette équation est simple à résoudre : on pose $K^2 = 1 + \frac{2|a|\mu}{\Lambda^2} = \frac{\Lambda^2 + 2|a|\mu}{\Lambda^2} > 0$, il vient

$$u'' + K^2 u = \frac{\mu}{\Lambda^2}$$

$$u(\theta) = \alpha \cos(K\theta) + \beta \sin(K\theta) + \frac{\mu}{\Lambda^2 K^2}$$

Les deux constantes α et β sont des constantes d'intégration. On impose de partir d'un point où la distance radiale présente un extremum (apogée ou périgée $\dot{r} = -u'\Lambda$) $u'(0) = K\beta = 0 \implies \beta = 0$ soit

$$u(\theta) = \frac{1}{p}(\alpha p \cos(K\theta) + 1) \quad \text{avec } p = \frac{\Lambda^2 K^2}{\mu} > 0$$

C'est l'équation d'une courbe polaire de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \alpha p \cos(K\theta)}$$

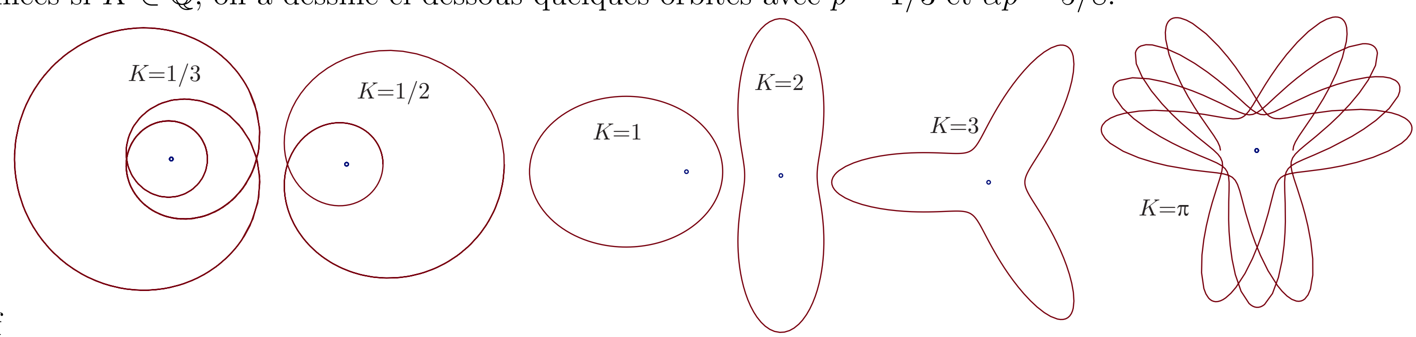
Ce n'est pas une ellipse à cause du paramètre K. Pour chaque entier $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \alpha p} \text{ pour } \theta = \frac{2k}{K}\pi \text{ et } r_{\max} = \frac{p}{1 - \alpha p} \text{ pour } \theta = \frac{2k+1}{K}\pi$$

On définit le demi-grand-axe comme

$$a_j = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{\alpha p}{1 - \alpha^2 p^2} = \frac{\alpha \mu \Lambda^2 K^2}{\mu^2 - \alpha^2 \Lambda^4 K^4}$$

La périgée précesse de l'angle $\Delta\theta = \frac{2\pi}{K}$ sur un transfert périgée→apogée→périgée. Les orbites sont fermées si $K \in \mathbb{Q}$, on a dessiné ci-dessous quelques orbites avec $p = 1/3$ et $\alpha p = 5/8$.



epler jauge.pdf

5. Pour calculer l'énergie massique le plus simple est de revenir à sa définition

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + \psi = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \psi = \frac{1}{2}\left(u'^2\Lambda^2 + \Lambda^2 u^2\right) - \mu\left(u + au^2\right)$$

$$= \frac{\Lambda^2}{2}\left(u'^2 + K^2 u^2 - \frac{2\mu}{\Lambda^2}u\right) = \frac{\Lambda^2}{2}\left(u'^2 + \left(Ku - \frac{\mu}{K\Lambda^2}\right)^2 - \frac{\mu^2}{K^2\Lambda^4}\right)$$

on utilise le fait que $u(\theta) = \alpha\cos(K\theta) + \frac{\mu}{\Lambda^2 K^2}$ pour obtenir

$$\xi = \frac{1}{2K^2\Lambda^2}\left(\alpha^2 K^4 \Lambda^4 - \mu^2\right)$$

avec l'expression du demi-grand-axe on a

$$\xi = -\alpha\frac{\mu}{2a_j}$$

On retrouve des choses connues...

Je ne sais pas répondre à la question subsidiaire autrement qu'en faisant un calcul d'intégrale... avez-vous d'autres idées ?

Ce que je propose est assez simple : la période est définie par la relation habituelle

$$\tau = 2\int_{t_{r_{\min}}}^{t_{r_{\max}}} dt = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\dot{r}} = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2(\xi - \psi) - \frac{\Lambda^2}{r^2}}}$$

ici $\psi = -\frac{\mu}{r} + \frac{|a|\mu}{r^2}$ donc on peut écrire

$$\tau = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2\left(\xi + \frac{\mu}{r}\right) - \frac{\Lambda^2 + |a|\mu}{r^2}}}$$

Cette période est celle d'une orbite d'énergie ξ et de moment cinétique $\Lambda^2 + |a|\,\mu$ dans un potentiel képlerien. Or , dans un tel potentiel la période ne dépend pas du moment cinétique, elle est donnée par la 3^e loi de Kepler. Ainsi

$$\tau = 2\pi\mu\,(2\xi)^{-3/2}$$