Autour du théorème du Viriel

$\boxed{\text{Classique}}$

On considère une paticule de masse m repérée dans un référentiel galiléen par le vecteur $\vec{r}$ et dont l'énergie potentielle est un champ scalaire $U(\vec{r})$ homogène de degré α, i.e. $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $U(\lambda\vec{r})=\lambda^{\alpha}U(\vec{r})$. Montrer que l'on a la relation

$$\frac{d^2I}{dt^2}=2T-\alpha U$$

où T est l'énergie cinétique de m et I un champ scalaire que l'on précisera.

$\boxed{\text{Statistique}}$

Soit une particule test de masse m, repérée dans l'espace des phase par le vecteur $(\vec{r},\vec{p}=m\vec{v})$ évoluant sans collision dans un champ gravitationnel moyen $\psi(r)$.

Démontrer que

$$\frac{d^2I}{dt^2}=2T-U$$

où I, T et U sont les traces des tenseurs d'inertie, d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de la particule test.

$\boxed{\text{Application}}$

Vérifier le théorème du viriel pour les systèmes astrophysiques suivants :

	M_{tot} $[M_\odot]$	Taille apparente [$'$ d'arc]	$\langle v^2\rangle^{1/2}$ [km·s^{-1}]	Distance [kpc]
Amas ouvert des pléiades M 45	300	110	$0,430$	0,136
Amas globulaire d'Hercule M 13	6×10^5	20	12	22,2
Galaxie elliptique géante de la vierge M 87	6×10^{12}	7	560	16,4$\times10^3$
Galaxie spirale d'andromède M 31	min : 630×10^9 max : 4100×10^9	190' $\times$ 60'	150	778