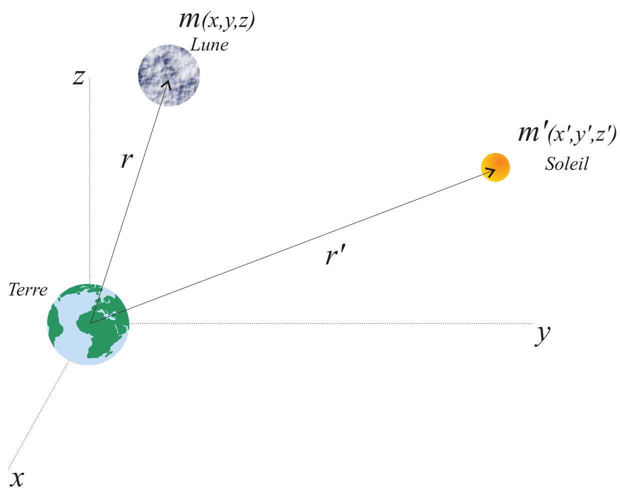
Travaux dirigés de mécanique céleste

Exercice 1 : Théorie de la Lune



1. Montrer qu'en considérant la perturbation due au Soleil, l'équation du mouvement de la Lune autour de la Terre s'écrit

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|^3} + \text{grad}_{\overrightarrow{r}}\,(R)$$

avec

$$R = Gm_\odot\left(\frac{1}{\left|\overrightarrow{r'} - \overrightarrow{r}\right|} - \frac{\overrightarrow{r'}\,.\,\overrightarrow{r}}{\left|\overrightarrow{r'}\right|^3}\right) \qquad \text{et} \qquad \mu = G\left(m_\oplus + m_L\right) \approx Gm_\oplus$$

2. Montrer que

$$R = \frac{Gm_\odot}{r'}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r'}\right)^2\left(3\cos^2\psi - 1\right) + O\left(\left(\frac{r}{r'}\right)^3\right)\right\}$$

3. Sachant que l'excentricité de l'orbite lunaire e et l'inclinaison de son plan orbital i sont petites ($e = 0.054$ et $i = 5°9' = 0.09$rad), à l'ordre le plus bas on trouve

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \left\{\frac{1-e^2}{1+e\cos f}\right\}^2 \approx 1 + \frac{3}{2}e^2 \qquad \text{et} \qquad \left(3\cos^2\psi - 1\right) \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}i^2\right)$$

En déduire que

$$R \approx k\left(n', a', r'\right) + \frac{n'^2a^2}{4}\left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2}i^2\right)$$

où l'on a introduit le moyen mouvement solaire n'.

4. On pose $n_\Omega = d\Omega/dt$ (moyen mouvement du noeud ascendant lunaire), $n_\omega = d\omega/dt$ (moyen mouvement du périgée lunaire) et $n_{\tilde{\omega}} = n_\omega + n_\Omega$ (moyen mouvement sidéral). Montrer que $n_\Omega \approx -n_\omega/2$.

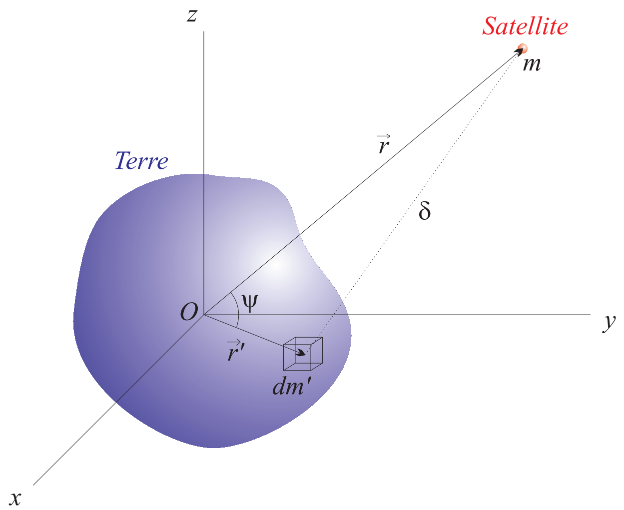
5. Calculer les valeurs de

$$T_\Omega = \frac{360°}{n_\Omega} \qquad \text{et} \qquad T_{\tilde{\omega}} = \frac{360°}{n_{\tilde{\omega}}}$$

les périodes respectives de rétrogradation de la ligne des noeuds lunaires sur l'écliptique et de révolution sidérale du périgée. Les observations fournissent $T_\Omega = 18.60$ ans et $T_{\tilde{\omega}} = 8.85$ ans.

A.N. $T_L = 27\text{j } 7\text{h } 43\text{min } 11,5\text{s}$ $\quad T_\odot = 365\text{j } 6\text{h } 9\text{min } 34,7\text{s}$
$m_L = 7,3.10^{22} Kg$ $\quad m_\odot = 1,2.10^{30} Kg$ $\quad m_\oplus = 6.10^{24} Kg$
$e = 1/18,21$ $\quad i = 5°8\,\text{min}\,43\text{s}$

Exercice 2 : Orbite d'un satellite artificiel dans le champ de gravitation de la Terre



1. Montrer que le potentiel de gravitation de la Terre dans lequel évolue le satellite de masse m est

$$U(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\vec{r}) \qquad \text{avec} \quad U_n(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r}\left\{\frac{1}{r^n}\int_{r'\in V} r'^n P_n(\cos\psi)\, dm'\right\}$$

où les fonctions $P_n(z)$ sont appelées polynômes de Legendre définis par

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^2-1\right)^n$$

on vérifiera sur les premiers termes que

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\psi)$$

2. Montrer que

$$U_0 = -\frac{Gmm_\oplus}{r}$$

et que si l'on choisi le centre de gravité de la terre comme origine O alors $U_1 = 0$.

3. On pose $x_\mu(\mu = 1, 2, 3) = x, y, z$ et $x'_\mu(\mu = 1, 2, 3) = x', y', z'$, et l'on introduit les moments $I_{\mu\mu}$ et produits $I_{\mu\nu}(\mu \neq \nu)$ d'inertie de la Terre par rapport aux axes $Oxyz$

$$I_{\mu\mu} = \int_V \left(r'^2 - x'^2_\mu\right) dm' \qquad \text{et} \qquad I_{\mu\nu} = \int_V x'_\mu x'_\nu \, dm'$$

Montrer que

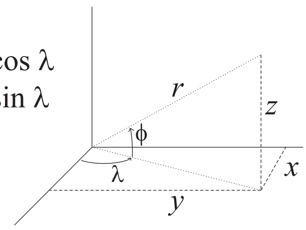
$$U_2\left(\overrightarrow{r}\right) = -\frac{Gm}{r^3}\left\{-\frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{3} I_{\mu\mu} + \frac{3}{2r^2}\sum_{\mu=1}^{3}\left[x_\mu^2\left(\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3} I_{\nu\nu} - I_{\mu\mu}\right) + \sum_{\nu\neq\mu}^{3} x_\mu x_\nu I_{\mu\nu}\right]\right\}$$

   (a) On impose maintenant aux axes Ox, Oy et Oz de notre référentiel d'être confondus avec les axes principaux d'inertie de la Terre (supposés fixes), en pratique et en première approximation on confond donc Oxy avec le plan équatorial terrestre et Oz avec l'axe polaire. Montrer que

$$U_2\left(\overrightarrow{r}\right) = -\frac{Gm}{r^3}\left\{\left(\frac{2I_{33} - I_{11} - I_{22}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sin^2\phi}{2}\right) - \frac{3\left(I_{11} - I_{22}\right)\cos^2\phi\cos 2\lambda}{4}\right\}$$

   où apparaissent les coordonnées polaires en dimension 3

$$x = r\cos\phi\cos\lambda$$
$$y = r\cos\phi\sin\lambda$$
$$z = r\sin\phi$$



   (b) Si finalement on admet que la Terre présente une symétrie de révolution autour de son axe polaire (i.e. $I_{11} = I_{22}$) montrer que

$$U_2\left(r, \phi\right) = \frac{Gmm_\oplus}{r}\left(\frac{r_e}{r}\right)^2 J_2 P_2\left(\sin\phi\right)$$

   ou J_2 une constante que l'on déterminera.

4. En faisant l'hypothèse que la relation obtenue dans le cas $n = 2$ se généralise, écrire dans ce contexte la fonction perturbatrice du système.

5. On ne considère à présent que le premier terme $(n = 2)$dans la fonction perturbatrice.

   (a) On montre que $\sin\phi = \sin i \sin(\omega + f)$ où i, f et ω sont les éléments osculateurs elliptiques du mouvement du satellite. On peut toujours décomposer le fonction perturbatice R en une partie oscillante $\widetilde{R}$ et une partie séculaire $\overline{R}$ telles que

$$\widetilde{R} = R - \overline{R} \qquad \text{avec} \qquad \overline{R} = \frac{2\pi}{T}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R dt = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} R dt$$

   calculer $\overline{R}$ en fonction des éléments osculateurs elliptiques.

(b) En déduire que l'excentricite, le demi grand axe et l'inclinaison de l'orbite ne varient pas séculairement, et donner les caractéristiques orbitales d'un satellite de masse $m = 1000Kg$, sur une orbite inclinée de $i = 45°$ par rapport à l'équateur, d'excentricité $e = 0.01$ et de demi-grand axe $a = 2,5\ r_\oplus$. On donne $J_2 = 0.0010826$.

Exercice 3 : Haltères immaginaires !

A - Rappel : Problème du satellite

On considère un satellite de masse m en orbite dans le champ gravitationel $\psi_\oplus$ crée par la Terre. On néglige le champ crée par la masse du satellite.

1. Sous quelles hypothèses, ce champ est-il de la forme

$$\psi_\oplus(r,\varphi) = -\frac{G}{r}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{r_e}{r}\right)^n \alpha_n P_n(\sin\varphi) \tag{1}$$

où $G = 6.672\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,Kg^{-1}\ s^{-2}}$ est la constante de gravitation, $r_e = 6\ 378\,140\,\mathrm{m}$ est le rayon équatorial terrestre, r et φ sont respectivement la distance entre les barycentres de la Terre et du satellite et la latitude du satellite, α_n une constante et P_n le polynôme de Legendre d'ordre n (voir cours de gravitation classique)

2. Sous ces hypothèses que valent $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4.

3. Rappeler brièvement la nature de l'orbite du satellite si l'on commet l'approximation

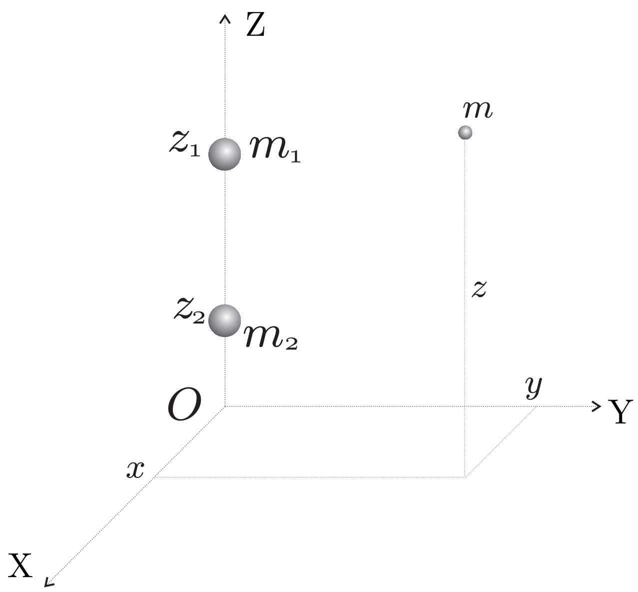
$$\psi_\oplus(r,\varphi) = -\frac{G}{r}\sum_{n=0}^{2}\left(\frac{r_e}{r}\right)^n \alpha_n P_n(\sin\varphi) \tag{2}$$

Cette approximation est-elle raisonnable ?

4. Le problème du mouvement de m dans le champ $\psi_\oplus(r,\varphi)$ de la relation (1) est-il intégrable ?

B - Particule test dans le champ de 2 masses fixes : Problème dit de l'haltère

On considère à présent le mouvement d'une particule test de masse m dans le champ gravitationnel crée par deux masses m_1 et m_2 fixes, ponctuelles ou assimilables comme telles (haltère). Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R} = (O\textsc{xyz})$ de la figure ci-après ces deux masses sont placées sur l'axe $O\textsc{z}$ à des distances respectives c_1 et c_2 de l'origine. La particule test occupe quant à elle la position (x, y, z) à l'instant t.



1. Montrer que le champ gravitationnel en $\overrightarrow{r}$ de coordonnées $[x, y, z]^T$ dans $\mathcal{R}$ est donné par la relation

$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$$

où $r_{k=1,2} := \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_k)^2}$ désigne la distance entre la masse m_k et la particule test.

2. Montrer que l'on peut écrire ce champ sous la forme

$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -\frac{G}{r}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\beta_n}{r^n}P_n\left(\sin\varphi\right)$$

Où l'on a posé $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On explicitera β_n en fonction de n, m_1, c_1, m_2 et c_2.

On rappelle que sous réserve de convergence de la série

$$\left[1 - 2\omega\sin\varphi + \omega^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\omega^n P_n\left(\sin\varphi\right)$$

3. On décide d'approximer le problème du satellite par le problème de l'haltère : On cherche l'haltère dont le champ se rapproche le plus de celui de la Terre décrite sous les hypothèses de la question A-1. Le problème de l'haltère ne posséde que 4 paramètres : m_k et c_k pour $k = 1, 2$. On ne peut donc imposer au maximum que 4 équations pour définir les caractéristiques de l'haltère soit

$$\beta_n = r_e^n\,\alpha_n \;\text{ pour } n = 0, 1, 2, 3$$

   (a) En imposant les deux premières contraintes ($n = 0, 1$) exprimer les masses $m_{k=1,2}$ de l'haltère en fonction de $m_\oplus$ et $c_{k=1,2}$.

(b) En reportant le résultat précédent dans les contraintes ($n = 2, 3$), montrer que la meilleure haltère cherchée possède des masses complexes éloignées d'une distance imaginaire pure !

(c) Qu'en est-il de β_n ?

(d) Que pensez-vous de la qualité de l'approximation du problème du satellite par celui de l'haltère décrite précédement.

C - Problème intégrable ?

En plaçant l'origine du référentiel au centre géométrique des deux masses ($|c_1| = |c_1| = c$) en passant en coordonées elliptiques (λ, μ, ω)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\cos\omega \\ y & = & c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\sin\omega \\ z & = & c\lambda\mu \end{array} \right.$$

et au prix d'un aménagement du temps conduisant à poser

$$dt = c^2\left(\lambda^2 + \mu^2\right) d\tau$$

les équations du mouvement de m dans le champ de l'haltère deviennent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\lambda}{d\tau} & = & \sqrt{L(\lambda)} \\ \\ \dfrac{d\mu}{d\tau} & = & \sqrt{M(\mu)} \\ \\ \dfrac{d\omega}{d\tau} & = & k\dfrac{\lambda^2+\mu^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \end{array} \right.$$

où k est une constante et $L(x)$ et $M(x)$ sont deux polynômes du $4^{ème}$ degré de la seule variable x qu'il n'est pas nécéssaire d'expliciter ici.

1. Le problème de l'haltère est-il intégrable ?

2. Finalement, comment qualifieriez-vous l'intégrabilité du problème du satellite sous les hypothèses de la question A-1 ?