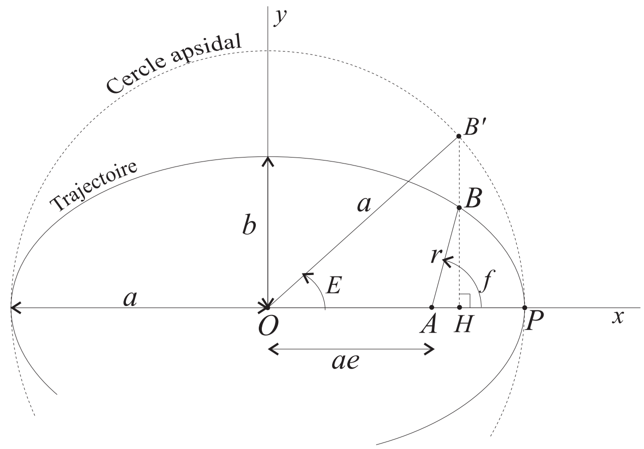
Autour du problème des 2 corps

1 Equation de Kepler



1. Montrer que $\frac{HB}{HB'} = \frac{b}{a}$. Exprimer x et y en fonction de a, e et E.
2. En déduire que $n\,(t-\tau) = E - e\sin E$ avec $n = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période du mouvement et τ l'instant du dernier passage au périgée.

2 Construction géométrique de l'équation polaire

On considère l'équation du mouvement du problème à deux corps écrite sous la forme réduite

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r$$

1. Montrer que $\vec{h} = \vec{v} - \vec{u} = cste$ avec $\vec{u} = \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta$ et $\vec{\Lambda} = \vec{r} \wedge \vec{v}$. En déduire que le lieu des vitesses (hodographes) est un cercle dont on précisera les caractéristiques.
2. En calculant $\vec{u} \cdot \vec{h}$ de 2 manières différentes, montrer que l'équation du mouvement est de la forme

   $$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta$$

   où l'on exprimera les paramètres p et e en fonction des données Λ, μ et $h = \left|\vec{h}\right|$
3. Montrer que le vecteur $\vec{A} = \vec{h} \wedge \vec{\Lambda}$ est constant. Dessinez ce vecteur. Quelle est la symétrie de Noether associée à la conservation de $\vec{A}$?