Devoir maison de Gravitation n°4

Une affaire de dimension

A - Quelques précisions ...

1. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, on considère l'intégrale
$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{x}|^2} \, d\boldsymbol{x} \tag{1}$$
Calculer I_2 en passant en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^2$:

2. Montrer que $I_n = (I_1)^n$ et en déduire la valeur de I_n

3. En passant en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin\theta_{n-1} ... \sin\theta_3 \sin\theta_2 \cos\theta_1 \\
x_2 &= r \sin\theta_{n-1} ... \sin\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1 \\
x_3 &= r \sin\theta_{n-1} ... \sin\theta_3 \cos\theta_2 \\
&... \\
x_{n-1} &= r \sin\theta_{n-1} \cos\theta_{n-2} \\
x_n &= r \cos\theta_{n-1}
\end{aligned}$$
avec
$$r = |\boldsymbol{x}| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$
et $\theta_1, ..., \theta_{n-1}$ les angles d'Euler de $\mathbb{R}^n$, on montre facilement que
$$I_n = |S_{n-1}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \tag{3}$$
ou $|S_{n-1}|$ représente la surface de l'hypersphère de dimension n.

   En utilisant le résultat de la question précédente calculer $|S_{n-1}|$. On rappelle à toutes fins utiles les propriétés de la fonction Γ d'Euler
$$\forall z \in \mathbb{R}_*^+ \quad \Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{z-1} ds \ , \ \Gamma(1/2) = \pi^{1/2} \text{ et } \ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

4. On se limitera à présent au cas $n > 1$, et on considère l'opérateur laplacien en dimension n

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{4}$$

montrer que pour toute fonction radiale de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & f\left(|\boldsymbol{x}|\right) := f\left(r\right) \end{array} \tag{5}$$

on a

$$\Delta_n f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{df}{dr} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(\frac{df}{dr}r^{n-1}\right) \tag{7}$$

5. On appelera fonction de Green du laplacien radial, une fonction g_n radiale, telle que pour toute fonction radiale φ infiniment dérivable et à support compact,

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{r\to+\infty} g_n\left(r\right) = 0 & \text{si } n > 2 \\ \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{g_n}{r} \ \leq 1 & \text{si } n = 2 \end{array} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} g_n \, \Delta_n\left(\varphi\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \, d\boldsymbol{x} = \varphi\left(0\right) \tag{8}$$

Il en résulte que g_n vérifie $\Delta_n g_n = \delta$.

Déterminer g_n (on ne pose pas la question de l'unicité ...)

Indications : On se souviendra du passage de (1) à (3) valable pour toute fonction radiale, on pourra utiliser (8) et la forme (7) de Δ_n , puis remarquer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{dr} dr = -\varphi\left(0\right)$$

B - Un joli théorème

On considère un volume fini Ω de $\mathbb{R}^n$, dans lequel une masse est répartie selon la densité $\rho\left(\boldsymbol{x}\right)$. On pourra considérer que cette densité est crée par N masses $\left(m_\alpha\right)_{1\leq\alpha\leq N}$ ponctuelles repérées par les vecteurs$\left(\boldsymbol{x_\alpha}\right)_{1\leq\alpha\leq N}$.

Si l'espace est isotrope (toutes les directions sont identiques), le potentiel gravitationnel créé par cette assemblée de charge est donné par la relation

$$\psi\left(\boldsymbol{x}\right) = k_n G \ \left(\rho \star g_n\right)\left(\boldsymbol{x}\right) = k_n G \int \rho\left(\boldsymbol{y}\right) g_n\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right) d\boldsymbol{y} \tag{9}$$

où G désigne la constante de Newton de la gravitation, g_n est la fonction de Green du laplacien radial de $\mathbb{R}^n$, $k_2 = 2\pi$ et $k_n = (n-2)\left|S_{n-1}\right|$ si $n > 2$.

On considère pour ce système, l'énergie cinétique totale

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{d\boldsymbol{x_\alpha}}{dt}\right)^2 \tag{10}$$

et l'énergie potentielle totale totale

$$U = \sum_{\beta=1}^{N} m_\beta \ \psi\left(\boldsymbol{x_\beta}\right) \tag{11}$$

1. Pourquoi, en dimension n la gravité est-elle représentée par le potentiel (9), on interprétera chacun des termes de (9).

2. On définit la valeur moyenne temporelle $\overline{f}$ d'une fonction $f\ (\boldsymbol{x}, t)$ par la relation

$$\overline{f}\,(\boldsymbol{x}) = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f\,(\boldsymbol{x}, t)\, dt$$

Montrer que pour $n > 2$, il existe toujours une constante α_n que l'on déterminera, telle que $2\overline{T}+\alpha_n\overline{U} = 0$

3. Comment s'appelle le résultat précédent lorsque l'espace est de dinension 3 ?

4. Que se passe-t-il lorsque l'espace est de dimension 2 ? Remarque : par dimension 2 on ne signifie pas le cas du mouvement plan sous l'action d'un potentiel radial en r^{-1} car cette situation correspond à de la gravité en dimension 3...

C - Physique statistique autogravitante en dimension 2

Pour décrire un système auto-gravitant en dimension 2, on introduit sa fonction de distribution dans l'espace des phases $f\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = f\,(\boldsymbol{w})$. On définit alors le nombre de particules

$$N\,[f] = \int f\,(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{w} \tag{12}$$

l'énergie moyenne

$$E\,[f] = \frac{1}{2m} \int \boldsymbol{p}^2 f\,(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{w} + \frac{1}{2} \int f\,(\boldsymbol{w})\, \psi\,(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{w} \tag{13}$$

et l'entropie du système

$$S\,[f] = -\int f\,(\boldsymbol{w}) \ln\left(f\,(\boldsymbol{w})\right) d\boldsymbol{w} \tag{14}$$

On montre alors qu'il existe un unique état d'équilibre correspondant au maximum de l'entropie sous les contrainte $N = cste$ et $E = cste$. Cet état est décrit par une fonction de distribution f^+de la forme

$$f^+ = K. \exp\left[-\beta\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \psi^+\,(\boldsymbol{x})\right)\right] \tag{15}$$

ou $\psi^+\,(\boldsymbol{x})$ est le potentiel gravitationnel crée par cette distribution d'équilibre, K et β sont deux constantes.

1. A quoi correspondent les constantes K et β.

2. On cherche à expliciter $\psi^+\,(\boldsymbol{x})$.

   (a) Montrer que ψ^+ vérifie l'équation différentielle

   $$\Delta_2 \psi^+ = \chi\ e^{-\beta\psi^+} \tag{16}$$

   où χ est une constante que l'on déterminera.
   Ce résultat permet entre autre d'affirmer que ψ^+ radiale (on l'acceptera)

   (b) En posant $\beta\psi^+ = 2\ln(u)$ résoudre l'équation (16). Indication : on pourra chercher u sous la forme d'une polynôme de bas degré.

3. Déduire du résultat précédent que la masse du système est finie (on ne demande pas d'expliciter cette masse).

Remarque : Pour toute dimension supérieure à 2, la masse du système décrit par la fonction de distribution qui maximise l'entropie est infinie ce qui contredit l'hypothèse $N\left[f^{+}\right]=cste$ et invalide l'approche "classique" de la thermodynamique statistique pour ce problème ...

D - Question subsidiaire

On dispose d'un petit télescope équipé d'une caméra CCD et d'un spectromètre. Comment prouver que les sections spatiales de notre espace temps sont de dimension 3 sur des échelles d'au moins quelques années lumière.