Devoir Maison n°3

Equations planétaires
Mouvements classiques du périastre
Application à Mercure

Une particule de masse m repérée dans un référentiel galiléen par le vecteur $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r}$ évolue dans une région $\mathcal{E} = \{\overrightarrow{r} \in \mathbb{R}^3,\ |\overrightarrow{r}| > |\varepsilon|\}$ dans laquelle règne le potentiel

$$\psi(r) = -\frac{GM}{r}\left[1 + \frac{\varepsilon}{k+1}\left(\frac{r_o}{r}\right)^k\right] \tag{1}$$

où G est la constante de gravitation, M et r_o sont homogènes respectivement à une masse et à une distance, k et ε sont des nombres réels.

A - Introduction

1. Calculer la force subie par la particule en chaque point de $\mathcal{E}$.

2. Calculer la densité de masse ρ associé au potentiel ψ. En déduire le signe de ε. On rappelle que pour toute fonction radiale ϕ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$,

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)$$

3. Dans quel intervalle doit varier k pour que la source du potentiel ψ ait une masse totale finie.

B - Orbite osculatrice

On souhaite étudier l'orbite de la particule de masse m dans le potentiel ψ à l'aide de la théorie planétaire de Lagrange. On considère les éléments osculateurs elliptiques $\{a(t), e(t), i(t), \omega(t), \Omega(t), \tau(t)\}$.

4. A quelle condition la théorie planétaire de Lagrange est-elle *a prioiri* applicable à ce problème?

5. Montrer que le potentiel perturbateur s'écrit

$$R = \mu\frac{\varepsilon}{r(k+1)}\left(\frac{r_o}{r}\right)^k \qquad \text{avec } \mu = GM \tag{2}$$

6. Montrer que i et Ω sont constants au cours du mouvement

7. Montrer que le paramètre focal $p = a(1-e^2)$ de l'ellipse osculatrice est lui aussi constant

   On s'intéresse à présent à la partie séculaire des pertubations en considérant le potentiel pertubateur séculaire

$$\overline{R} = \frac{1}{T}\int_0^T R\,dt \tag{3}$$

   où T est la période osculatrice.

8. Montrer que l'on peut écrire

$$\overline{R} = \frac{\mu p n \varepsilon}{2\pi C(k+1)}\left(\frac{r_o}{p}\right)^k f_k(e) \tag{4}$$

   où l'on a introduit $n = 2\pi T^{-1} = \sqrt{\mu}a^{-3/2}$, $C = \sqrt{p\mu}$ et $f_k(e)$ une fonction que l'on déterminera.

9. Calculer explicitement $f_k(e)$ pour $k = 1, 2, 3$ et 4, et donner un DL d'ordre 2 de $f_k(e)$ pour e proche de 0.

10. On approxime dorénavant $f_k(e)$ par son DL d'ordre 1 pour e proche de 0. Montrer que le périastre du mouvement séculaire osculateur évolue à vitesse constante n_ω et déterminer l'avance du périastre par période

$$\Delta\omega = n_\omega T = 2\pi\, n_\omega \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \tag{5}$$

C - Avance du périhélie de Mercure

On a constaté depuis longtemps que le mouvement de la planète Mercure présentait une avance de son périhélie d'environ 43 secondes d'arc par siècle. Nous allons tenter de voir si cette avance est imputable à l'applatissement du Soleil.

11. On considère que le Soleil est un sphéroïde de révolution applati aux pôles avec

$$\frac{r_e - r_p}{r_e} = 5 \times 10^{-7} \tag{6}$$

où r_e et r_p représentent respectivement le rayon équatorial et polaire du Soleil. Calculer le J_2 du Soleil.

Indication : Si $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\right\}$ alors

$$\iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right) = \frac{1}{5}\left(b^2 + c^2\right) \tag{7}$$

12. On considère que la planète Mercure évolue dans le plan équatorial du Soleil. Montrer que l'on peut choisir M, k, ε et r_o pour que le potentiel de l'équation (1) soit celui crée par un Soleil applati aux pôles.

13. Calculer l'avance du périhélie de Mercure causée par l'applatissement du Soleil. Qu'en déduisez vous?

Application numérique :

Orbite de Mercure : $a = 0.38750\ ua$, $e = 0,20563$ $\qquad$ $1ua = 149\ 597\ 871\ km$

Soleil : $r_e = 1.39 \times 10^6 km$, $M_\odot = 1.9 \times 10^{30} kg$

Constante de la gravitation : $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$