# ENSTA-Paristech
# DM 3 de Gravitation MAT42

## Le vecteur de Lagrange-Lenz-Runge-Laplace-Hermann

### A - Une constante du mouvement très particulière.

On considère une particule ponctuelle de masse $m$ repérée par un vecteur position $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ et soumise à une force de la forme $\vec{F} = -\operatorname{grad} V(r)$ avec $r = \|\vec{r}\|$.

$\boxed{1}$ Montrer que le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{r}}{dt}$ de la particule est conservé et en déduire que le mouvement est plan.

$\boxed{2}$ Ecrire le lagrangien. En déduire les équations du mouvement de la particule.

$\boxed{3}$ Montrer que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{\vec{r} \wedge \left(\vec{r} \wedge \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)}{r^\alpha}$$

où l'on déterminera l'entier positif $\alpha$.

$\boxed{4}$ On introduit l'impulsion de la particule $\vec{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vec{r}}{dt}}$ qui vaut ici $\vec{\pi} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$, montrer que

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\pi} \wedge \vec{L}\right) = mr^2 \frac{dV}{dr} \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$\boxed{5}$ On se place dans tout le reste du problème dans le cas du potentiel de Kepler attractif $V(r) = -\dfrac{k}{r}$ avec $k > 0$, montrer que le vecteur $\vec{A} = \vec{\pi} \wedge \vec{L} - km\dfrac{\vec{r}}{r}$ est une intégrale première du mouvement. Calculer $\vec{A} \cdot \vec{L}$ , que peut-on en conclure sur le vecteur $\vec{A}$.

Le découvreur de ce vecteur est bien évidement Joseph-Louis Lagrange, mais les auteurs de contributions à son sujet sont Laplace, Lenz, Runge et plus récemment Hermann.

Formulaire pour la partie A

- $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\ \vec{w}$
- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u}$

$\boxed{\text{B - La symétrie de Noether associée.}}$

On considère un corps $M$ de masse $m$ en orbite képleriene dans le champ gravitationnel crée par un corps de masse $m_F$ situé en un point $F$. On suppose que l'énergie de $M$ est négative, sa trajectoire est donc l'ellipse représentée sur la figure 1.

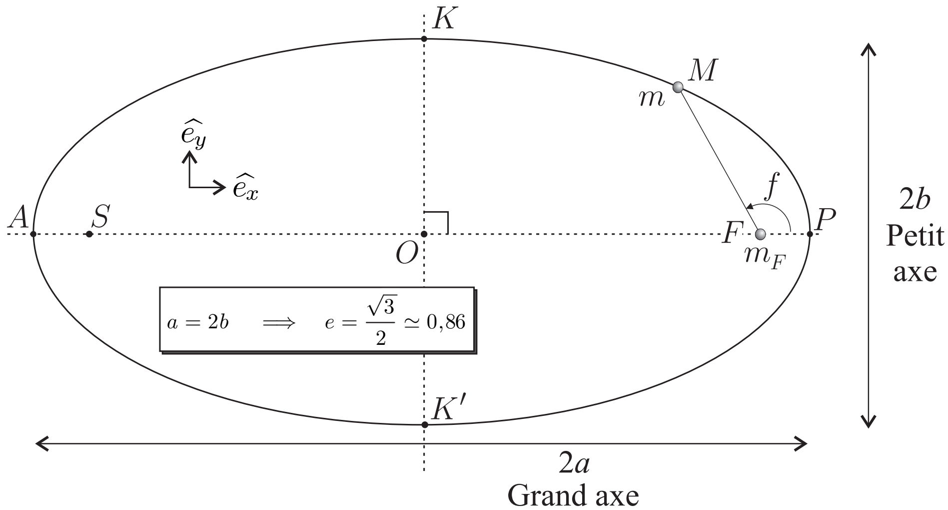


Figure 1: Caractérisation de la trajectoire

$\boxed{6}$ On rappelle qu'une ellipse d'exentricité $e$ et de demi-grand axe $a$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MS}\right\| = \Upsilon = \text{cte}$ avec $\left\|\overrightarrow{FS}\right\| = 2ae$. Déterminer la constante $\Upsilon$ en se plaçant en un point particulier de la trajectoire. Montrer que $\left\|\overrightarrow{KF}\right\| = a$. Déterminer, en fonction de l'excentricité $e$, les expressions de $\cos f$ et $\sin f$ lorsque $M$ est en $K$. En déduire la valeur de $f$ en ce point pour l'ellipse de la figure 1.

$\boxed{7}$ On rappelle que $\vec{r} = r\left(\cos f\ \widehat{e_x} + \sin f\ \widehat{e_y}\right)$ avec $r = p\left(1 + e\cos f\right)^{-1}$. Montrer que le vecteur vitesse $\vec{v}\left(M\right) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{df}{dt}\dfrac{d\vec{r}}{df}$ se met sous la forme

$$\vec{v}\left(M\right) = \lambda\left(e\ \widehat{e_y} - \sin f\ \widehat{e_x} + \cos f\ \widehat{e_y}\right)$$

où $\lambda$ est une constante que l'on exprimera en fonction de $L = \|\vec{r} \wedge m\vec{v}\|$, $m$ et $p$. On pourra exprimer $\dfrac{dr}{df}$ en fonction de $e$, $r$, $p$ et $\sin f$. En déduire que le vecteur vitesse parcours un cercle que l'on déterminera. Ce cercle est appelé cercle des vitesses ou hodographe de cette orbite.

$\boxed{8}$ En écrivant l'expression de l'énergie $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} - \frac{m\mu}{r}$ au périgée et à l'apogée, déduire l'expression de la constante $\mu = GM_F$ en fonction de $L$, $m$ et $p$. En déduire une expression de $L$ en fonction de $m$, $p$, $E$ et $e$.

$\boxed{9}$ En utilisant les résultats des questions précédentes montrer que la vitesse en $K$ et en $K'$ n'est portée que par le vecteur $\widehat{e_x}$ et que son module ne dépend que de $E$ et $m$.

Lorsqu'il est en $K$ et en conservant son vecteur vitesse, on transfère instantanément le point $M$ en un point $K_\varphi$ obtenu en lui appliquant une rotation d'angle $\varphi$ autour du point $F$ dans le plan orbital (voir figure 2).

$\boxed{10}$ Montrer que la nouvelle trajectoire est toujours une ellipse.

$\boxed{11}$ Déterminer le petit axe, le grand axe et l'excentricité de cette nouvelle ellipse. Calculer leurs nouvelles valeurs sur l'exemple de la figure 2 et tracer cette nouvelle orbite.

On considère la famille $\mathcal{F}_E$ des cercles des vitesses que l'on obtient en faisant varier l'angle $\varphi$. On démontre que $\mathcal{F}_E$ correspond à toutes les orbites possédant l'énergie $E$, cette famille est appelée l'hodographe des orbites d'énergie $E$.

$\boxed{12}$ Déterminer les caractéristiques du cercle des vitesses de la nouvelle orbite. En généralisant, tracer $\mathcal{F}_E$.

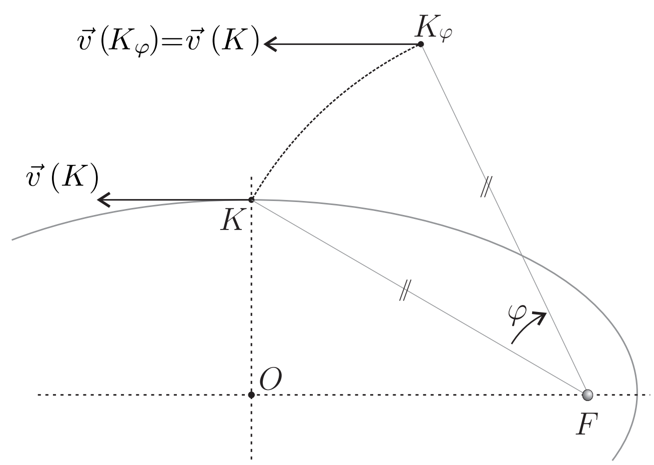


Figure 2: Transport du point en conservant sa vitesse, sur la figure $\varphi = \pi/6$ dans le sens horaire.

On appelle projection stéréographique d'une sphère (dans $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{S}_2$) sur un plan, l'application illustrée sur la figure 3 telle que, par exemple, l'image de $z_1$ est $z_1'$. Il s'agit d'une transformation conforme, l'image d'un cercle est donc un cercle.

$\boxed{13}$ De quels cercles sur la sphère $\mathcal{S}_2$, la famille $\mathcal{F}_E$ est-elle l'image dans le plan par projection stéréographique. Quelle transformation de la sphère laisse globalement invariante $\mathcal{F}_E$ ?

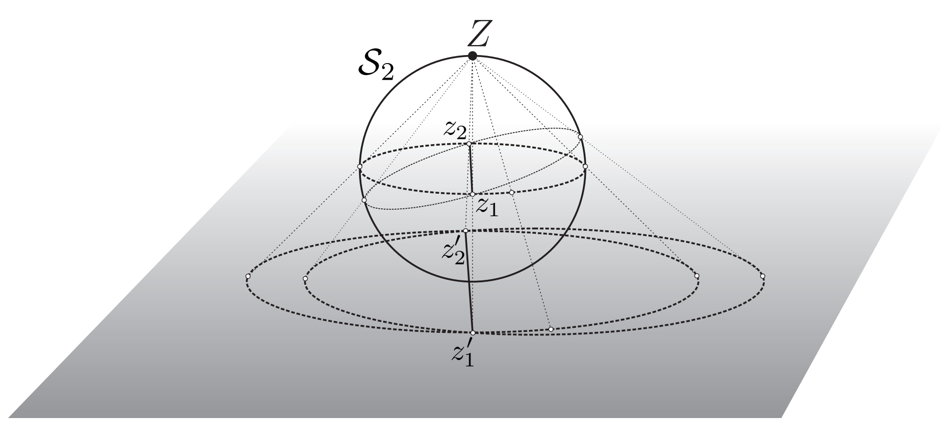


Figure 3: Projection stéréographique.

En généralisant à toutes les valeurs possibles de l'énergie et en prenant en compte tous les plans orbitaux possibles associés aux différentes valeurs possibles du moment cinétique, l'hodographe devient une collection de sphères.

$\boxed{14}$ De quelle projection stéréographique généralisant celle de la question précédente, cet hodographe est-il l'image. Quelle est la symétrie correspondante ?

On montre que cette symétrie est la symétrie de Noether associée à la conservation du vecteur