Devoir maison 1

Cours de gravitation classique

1 Premier problème

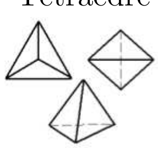
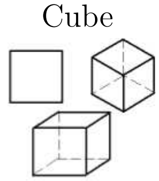
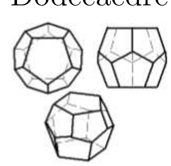
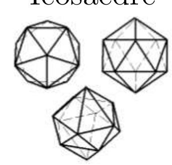
Pourquoi les jours de la semaine sont-ils organisés dans l'ordre que vous connaissez ?

2 Second Problème

Dès l'antiquité les astronomes ont cherché de l'ordre dans le mouvement des planètes, astres errants qui semblaient se mouvoir à leur guise dans le système solaire. L'idée d'un ordonnancement géométrique est apparue chez les élèves de Platon et fut renforcée par la physique d'Aristote. Mais le premier modèle complètement géométrique est l'œuvre de Kepler, en souvenir de cet illustre astronome nous allons commencer par étudier la nature de son résultat.

Un polyèdre est dit régulier s'il est constitué de faces toutes identiques et régulières, et que tous ses sommets sont identiques, toutes ses arêtes ont donc la même longueur a. Il n'en existe que 5 qui soient convexes : le tétraèdre dont les faces sont 4 triangles équilatéraux, le cube (6 carrés), l'octaèdre (8 triangles), le dodécaèdre (12 pentagones) et l'icosaèdre (20 triangles). Chacun de ces solides possède une unique sphère inscrite et circonscrite dont on peut montrer que les rayons r_i et r_c sont des multiples de a. Le 19 juillet 1595, alors qu'il donnait un cours à l'Université de Graz sur le rapport des distances de Saturne et Jupiter au soleil, Kepler fût frappé de reconnaître dans son calcul le rapport des rayons des cercles circonscrit et inscrit dans le cube, soit $\sqrt{3}$. Il arrêta son cours, calcula les mêmes rapports pour les cinq polyèdres et chercha les meilleures estimations de distance au soleil des planètes connues. Moins d'un an plus tard il publiait sa première oeuvre majeure, le mysterium cosmographicum, dans lequel il pensait avoir découvert le secret du monde : les 5 polyèdres s'intercalent dans les sphères portant les 6 planètes, le cercle inscrit du précédent étant le cercle circonscrit du suivant...

1. En remplissant un tableau judicieux, indiquer les possiblités d'emboîtage des polyèdres qui ont fait croîre à Kepler qu'il avait découvert le secret du monde. Le tableau ci-dessous donne les rayons de ces sphères (en unité d'arête) pour les 5 polyèdres réguliers,

Polyèdre	Tétraèdre 	Cube 	Octaèdre 	Dodécaèdre 	Icosaèdre 
$\frac{r_i}{a}$		1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{\varphi^5}{\sqrt{5}}}$	
$\frac{r_c}{a}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{3}$			

Quelques valeurs pour les 5 polyèdres convexes de $\mathbb{R}^3$, à compléter bien sûr !

où $\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ est le nombre d'or. Les valeurs utilisées par Kepler pour les calculs de rapports de distance peuvent être consultées, en latin, page 77 de l'édition originale du Mysterium cosmographicum

Saturne	Jupiter	Mars	Terre	Vénus	Mercure
9163	5261	1440	1000	762	429

On remarquera d'ailleurs à la consultation que Kepler s'est permis quelques libertés avec les valeurs proposées par Copernic...

Un siècle plus tard, entre 1766 et 1772 Titius, Bode puis Wurm firent successivement remarquer que les planètes connues à l'époque suivaient une progression géométrique

$$r_n = 0,4 + 0,3 \times 2^n$$

où r_n est le demi-grand axe moyen de la $n-$ième planète considérée exprimé en unité astronomiques. La séquence commence avec $n \to -\infty$ pour Mercure ($r_{me} = 0,39$ ua), $n = 0$ pour Vénus ($r_{ve} = 0,72$ ua), $n = 1$ pour la Terre, etc...

Cette loi connut deux succès considérables. Le premier lorsqu'en 1781 Herschell découvrit Uranus et que deux ans plus tard Laplace détermina sa période $T_{ur} = 30\ 688$ jours sidéraux (Système du monde, Ch. 9, p.80). Le second alors que la loi prévoyait une planète manquante entre Mars ($r_{ma} = 1,52$ ua) et Jupiter ($r_{ju} = 5,20$ ua), et que l'on découvrit au tout début du XIX^{è} siècle la ceinture d'astéroïdes située à une distance moyenne $r_{as} = 2,8$ ua du Soleil.

Les perturbations de l'orbite d'Uranus furent attribuées tout naturellement à une nouvelle planète. Adams puis Leverrier proposèrent des paramètres orbitaux en accord avec la loi de Titius-Bode. Le premier proposa en 1841 un demi-grand axe $r_{ne,a} = 36,154$ ua et une excentricité de 0,107 tandis que le second avait utilisé un demi grand axe $r_{ne,l} = 37,25$ ua. Les deux calculs étaient faux, bien que tous deux aient annoncé la position de la planète non loin de sa position réelle ou Galle l'observa le 23 septembre 1846. Il y a environ 6 mois, le 12 juillet 2011, Neptune est retournée au point où Galle l'avait observée pour la première fois, confirmant que la Loi de Titius-Bode avait des limites...

L'objectif de ce problème est de comprendre l'origine physique possible de cette loi.

2. On rappelle que le demi-grand axe de Saturne est $r_{sa} = 9,54$ ua, dresser un tableau des données observationnelles, des prédictions de la loi de Titius-Bode et de l'erreur relative correspondante pour le système solaire.

Les explications de la loi de Titius-Bode peuvent être rangées en deux catégories :

- Les explications dynamiques considèrent que cette loi est le résultat du processus de formation des planètes, elles reposent sur des analyses de stabilité du disque proto-planétaire;
- Les explications cinématiques attribuent la loi à des interactions orbitales une fois le système planétaire formé.

Mais ceci est une autre histoire...